ROZMYTE PROGRAMOWANIE LINIOWE WE WSPOMAGANIU DECYZJI W BUDOWNICTWIE, GOSPODARCE PRZESTRZENNEJ I KOMUNALNEJ

Mirosław DYTCZAK, Grzegorz GINDA, Barbara JASTRZĄBEK

Streszczenie: Decyzje w budownictwie, gospodarce przestrzennej i komunalnej mają specyficzny charakter. Ich przedmiot charakteryzuje się bowiem długotrwałym, złożonym i wieloaspektowym oddziaływaniem na otoczenie. Dynamiczne zmiany, zachodzące w otoczeniu przedmiotu i trudno mierzalny charakter uwarunkowań dodatkowo utrudniają podejmowanie właściwych decyzji. W tych warunkach konieczne staje się przygotowanie elastycznych, łatwo dostosowywanych do zmian w otoczeniu i dopasowanych do występujących uwarunkowań, decyzji. W pracy przedstawiono możliwości zastosowania w tym celu rozmytego programowania liniowego i posybilistycznego.

Słowa kluczowe: budownictwo, gospodarka przestrzenna, gospodarka komunalna, decyzja, kryterium, trudno mierzalność, rozmytość, programowanie liniowe.

1. Wstęp

Decyzje podejmowane w budownictwie oraz gospodarce przestrzennej i komunalnej rodzą długotrwałe i złożone interakcje z otoczeniem. Dodatkowo, z przedmiotem decyzji wiąże się zwykle szybkozmienność otoczenia, obecność informacji o niepewnym i niepełnym charakterze, wpływ czynników trudno mierzalnych oraz wieloaspektowość i oddziaływań. Z uwagi na to, do modelowania zachowania przedmiotu konieczne staje się zastosowanie modeli, pozwalających uniezależnić się od zmienności uwarunkowań i niedoskonałego charakteru dostępnej informacji, przy zapewnieniu możliwości ujmowania trudno mierzalnej i wieloaspektowej natury rozpatrywanych zagadnień.

Do wspomagania decyzji w tym kontekście można użyć dwóch podstawowych podejść. Pierwsze wiąże się z wieloaspektową oceną elementów, zawczasu przygotowanego, zbioru potencjalnych wariantów decyzji. W sukurs przychodzą tutaj metody wieloatrybutowej oceny decyzji (ang. multi-attribute decision analysis, MADA). W przypadku braku określenia takich wariantów, zachodzi konieczność ich generowania. Służy temu zastosowanie metod wielokryterialnego programowania (ang. multi-objective decision ma king, MODM).

W pracy ujęto drugi z ww. przypadków. Wymaga on zastosowania odpowiednich metod programowania wielokryterialnego. Możliwości ich użycia w przypadku dziedzin, wymienionych na początku pracy, zilustrowano na podstawie zastosowania programowania liniowego. Wykorzystano przy tym koncepcję rozmytego programowania liniowego (RPL) i powiązanej z nią koncepcji programowania posybilistycznego (PPL). Zasadniczo, przedstawiono różne podejścia, których można potencjalnie użyć do rozwiązywania zagadnień w wymienionych wcześniej dziedzinach i w ten sposób wyjść naprzeciw postulatom i oczekiwaniom zainteresowanych środowisk, wyartykułowanym przykładowo w pracy [1].

2. Rozmyte i posybilistyczne programowanie liniowe

Programowanie liniowe (PL) stanowi jedną z najstarszych, najbardziej rozwiniętych i rozpoznanych metod modelowania zagadnień decyzyjnych. Udowodniła ono swą użyteczność w niezliczonych zastosowaniach praktycznych. Wpłynęła ono także znacząco na rozwój innych podejść do modelowania zagadnień praktycznych w badaniach operacyjnych np. programowania nieliniowego, programowania celowego, programowania sieciowego, teorii gier. Zasadniczo, przy użyciu PL można rozwiązywać zagadnienia, związane liniową postacią (jednej lub wielu) funkcji celu (kryterium) oraz ograniczeń (nierówności, równości). Typową postać modelu PL z jedną funkcją kryterium przedstawiono poniżej:

$$\mathbf{c} \cdot \mathbf{x} \to \max$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} \le \mathbf{b} \tag{1}$$

$$\mathbf{x} \ge \mathbf{0}$$

gdzie: **c**, **x**, **A**, **b** oznaczają odpowiednio: wektory współczynników funkcji celu i zmiennych decyzyjnych, macierz współczynników zestawu ograniczeń oraz wektor wyrazów wolnych w ograniczeniach.

Model (1) ma zasadniczą wadę, polegającą na konieczności zapewnienia deterministycznych wartości parametrów **A**, **b**, **c**, które zwykle nie odpowiadają rzeczywistym uwarunkowaniom podejmowania decyzji, o siłą rzeczy, nieprecyzyjnym i trudno mierzalnym charakterze.

Tego rodzaju ograniczenia można modeli PL można wyeliminować, posługując się koncepcją rozmytego programowania liniowego (RPL). Poniżej przedstawiono, analogiczną w stosunku do modelu (1), postać modelu programowania liniowego z rozmytymi parametrami modelu $\tilde{\mathbf{c}}, \tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{b}}$:

$$\tilde{\mathbf{c}} \cdot \mathbf{x} \to \max$$

$$\tilde{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{x} \le \tilde{\mathbf{b}} \tag{2}$$

$$\mathbf{x} \ge \mathbf{0}$$

Zasadniczo, brak precyzji i trudno mierzalność są ujmowane w modelu (2) w subiektywny sposób. Zarówno subiektywne, jak i obiektywne ujęcie wpływu ww. czynników jest możliwe dzięki zastosowaniu podejścia posybilistycznego, związanego z teorią możliwości [2]. W kontekście programowania liniowego służy temu posybilistyczne (możliwościowe) programowanie liniowe (PPL) [3]. Przy jego zastosowaniu można następująco wyrazić odpowiednik programu (2):

$$\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{x} \to \max$$

$$\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{x} \le \boldsymbol{\beta} \tag{3}$$

$$\mathbf{x} \ge \mathbf{0}$$

gdzie: $\boldsymbol{\gamma}$, $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ oznaczają kolejno (obiektywnie, bądź subiektywnie definiowane) rozkłady możliwości, związane z wartościami parametrów programu liniowego.

Modele RPL i PPL mogą przyjmować różne postacie, w zależności od charakteru ich parametrów. Przy ich użyciu można więc rozpatrywać zagadnienia z rozmytą (możliwościową) formą wszystkich bądź tylko niektórych parametrów [4].

Rozwiązaniu każdej z powyższych postaci programów RPL i PPL służy jeden z kilku dostępnych sposobów, wykorzystujący sformułowanie pomocniczego, zastępczego programu liniowego z nierozmytymi współczynnikami [4]. Sformułowanie takie jest dostosowane do sposobu modelowania rozmytości (lub rozkładu możliwości) parametrów. Zasadniczo, stosowane są przy tym różne sposoby odwzorowywania funkcji przynależności $\mu(x)$ i rozkładu możliwości $\pi(x)$ zmiennej rozmytej x (rys.1), przy czym najczęściej wykorzystuje się w tym najprostsze formy aproksymacji: trójkątna, trapezowa lub trójliniowa.

Postacie modeli RPL (2) i PPL (3) można uogólnić na przypadki rozmytych relacji, związanych z ograniczeniami. Możliwe jest także zastosowanie powyższych modeli do rozwiązywania zagadnień z większą liczbą kryteriów. Wymaga to jednak agregacji, jednego kryterium na podstawie kilku pierwotnie sformułowanych funkcji celu. Nie zawsze jest to możliwe, gdyż w praktyce wymagane jest często uwzględnianie szeregu, zbyt zróżnicowanych w formie kryteriów.

Powyższy mankament można wyeliminować stosując podejścia, przystosowane do rozwiązywania zagadnień wielokryterialnych. Służy temu przykładowo ciekawa, interaktywna metoda formułowania i uzyskiwania rozwiązań wielokryterialnych modeli rozmytego (posybilistycznego) programowania liniowego, zaproponowana przez Sakawę [5]. Dzięki jej zastosowaniu można uzyskać rozwiązania zarówno w przypadku nierozmytych, jak i rozmytych postaci funkcji celu.

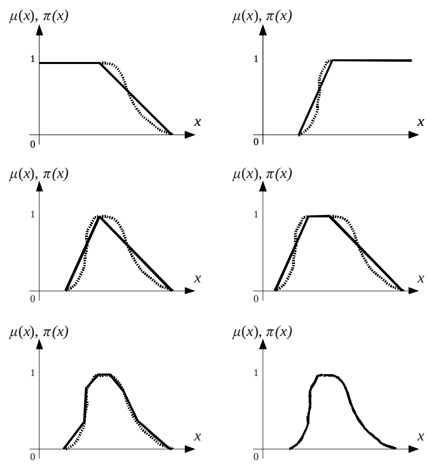
W przypadku braku rozmytości funkcji celu, odpowiadającemu rozmytości jedynie parametrów modelu PL, jest rozpatrywana następująca postać zagadnienia wielokryterialnego programowania liniowego:

$$\tilde{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{x} \to \min$$

$$\tilde{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{x} \le \tilde{\mathbf{b}} \tag{4}$$

$$\mathbf{x} \ge \mathbf{0}$$

w której $\tilde{\mathbf{C}}$ oznacza macierz współczynników funkcji celu (element c_{ij} odpowiada współczynnikowi i-tego kryterium w odniesieniu do j-tej zmiennej decyzyjnej).



Rys. 1.Typowe formy aproksymacji rozmytości i rozkładów możliwości [4]

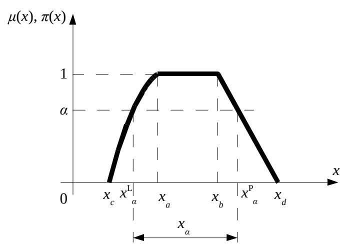
Poszczególne parametry w modelu (4) mogą przyjmować formę liczb rozmytych lub rozkładów posybilistycznych przedstawionych (rys.2), a w szczególności (w przypadku całkowitej pewności), liczb rzeczywistych.

Model (4) można zapisać w równoważnej, nierozmytej postaci (5), dzięki przyjęciu wartości poszczególnych rozmytych parametrów na poziomie funkcji przynależności (rozkładu możliwości), związanym z przyjętym arbitralnie poziomem cięcia α i odpowiadającym mu α-przekrojem (rys.2). Forma modelu (5) nazywana jest nierozmytym (ostrym) wielokryterialnym α-programowaniem liniowym (ang. nonfuzzy α-multi-objective linear programming, α-MOLP). Występujące w nim wartości parametrów są traktowane jak dodatkowe zmienne.

$$\mathbf{C}_\alpha \cdot \mathbf{x} \rightarrow \min$$

$$\mathbf{A}_\alpha \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{b}_\alpha \tag{5}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$



Rys. 2. Przyjęta forma rozmytych wartości parametrów modelu (4)

Przy rozwiązywaniu zagadnienia (5) wykorzystuje się uogólnienie koncepcji optymalności Pareto na przypadek α-przekroju. Uzyskane w ten sposób, liczne, rozwiązania tworzą zbiór, stanowiący podstawę wyboru najlepszego spośród nich. Do dokonania kompromisowego wyboru konieczne staje się zastosowanie dodatkowych, subiektywnych kryteriów jakościowej natury. Dokonuje się go dzięki przekształceniu rozpatrywanego zagadnienia do wielokryterialnej postaci rozmytej (ang. multi-objective linear programming fuzzy problem, MOLP-FP), rozwiązywanej metodą interaktywną.

Pojedyncze rozwiązanie α-optymalne w sensie Pareto jest wyznaczane w odmienny sposób w przypadku rozmytości jedynie samych parametrów i w przypadku dodatkowego występowania relacji rozmytych celów.

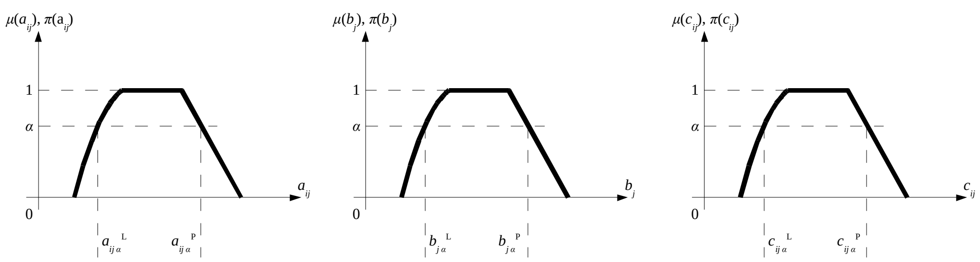
W pierwszym z nich, rozpoczyna się od przyjęcia poziomu α oraz punktu odniesienia, (ang. reference point), określającego referencyjne wartości poszczególnych funkcji celu ($\bar{z}_1, \bar{z}_2, \ldots, \bar{z}_k$). Rozważane zagadnienie przyjmuje wtedy następującą postać:

$$\begin{gathered} v \rightarrow \min \\ \mathbf{C} \cdot \mathbf{x} - \bar{\mathbf{z}} \leq \mathbf{v} \\ \mathbf{A}_\alpha \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{b}_\alpha \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{gathered} \tag{6}$$

gdzie: v jest optymalizowaną zmienną, a $\mathbf{v}$ jest wektorem, o elementach równych wartości tej zmiennej.

Dzięki zastosowaniu koncepcji α-przekroju w przypadku poszczególnych parametrów (rys.3), model (6) uzyskuje postać:

$$\begin{gathered} v \rightarrow \min \\ \mathbf{C}_\alpha^{\mathrm{L}} \cdot \mathbf{x} - \bar{\mathbf{z}} \leq \mathbf{v} \\ \mathbf{A}_\alpha^{\mathrm{L}} \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{b}_\alpha^{\mathrm{P}} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{gathered} \tag{7}$$



Rys. 3. α-przekrojowe wartości parametrów modelu

Otrzymane rozwiązanie optymalne $\mathbf{x}^*$ modelu (5) należy zweryfikować pod kątem α-optymalności Pareto. Służy temu odrębny program liniowy:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i \rightarrow \max \\
&\mathbf{C}_{\alpha}^{\mathrm{L}} \cdot \mathbf{x} + \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{C}_{\alpha}^{\mathrm{L}} \cdot \mathbf{x}^{*} \\
&\mathbf{A}_{\alpha}^{\mathrm{L}} \cdot \mathbf{x} \le \mathbf{b}_{\alpha}^{\mathrm{P}} \\
&\mathbf{x} \ge \mathbf{0}, \ \ \boldsymbol{\varepsilon} \ge \mathbf{0}
\end{aligned} \tag{8}$$

gdzie: k jest liczbą kryteriów; górny indeks przy symbolach macierzy i wektorów oznacza odniesienie do odpowiednich, lewych (L) lub prawych (P) granic przedziału α-przekroju; natomiast ε_i są (obok **x**) zmiennymi, formującymi wektor **ε**.
Równość $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0}$ świadczy o α-optymalności rozwiązania modelu (6). Natomiast uzyskanie ostrej nierówności $\boldsymbol{\varepsilon} > \mathbf{0}$ identyfikuje jako α-optymalne, rozwiązanie **x** zagadnienia (8).

Interaktywny sposób przybliżania ostatecznego rozwiązania zagadnienia (6) wiąże się z następującymi krokami obliczeń:

10. Określenie ekstremalnych wartości poszczególnych funkcji dla pary skrajnych poziomów parametru $\alpha = 0$ i $\alpha = 1$.
11. Przyjęcie innej, dopuszczalnej wartości parametru z α przedziału od 0 do 1.
12. Powtarzanie następującej sekwencji działań:
    a) wyznaczenie optymalnego rozwiązania programu (6),
    b) weryfikacja α-optymalności rozwiązania,
    c) wyznaczenie współczynników zamiany (ang. trade-off ratio) między funkcjami kryteriów a przyjętym poziomem przekroju α,
    d) powrót do podpunktu a) w przypadku oceny uzyskanego rozwiązania jako niezadawalającego, dzięki wykorzystaniu wartości współczynników zamiany i modyfikacji poziomu odniesienia.

Poza parametrami modelu (6), przy wyznaczaniu wartości współczynników zamiany wykorzystuje się informację związaną z mnożnikami metody Simplex, odpowiadającymi optymalnemu rozwiązaniu tego modelu. Szczegóły zawarto w pracy [5]. Przy poszukiwaniu kolejnych rozwiązań należy zwrócić uwagę na dwa fakty. Po pierwsze, z charakteru optymalności w sensie Pareto wynika, że poprawa wartości jednej z funkcji celu, w ramach przyjętego na danym etapie obliczeń poziomu α, odbywa się kosztem pogorszenia wyniku uzyskiwanego w przypadku co najmniej jednej z pozostałych funkcji. Po drugie, przyjmowanie wyższych wartości parametru α (równoważne z szerszemu przekrojowi) powoduje zazwyczaj znaczne pogorszenie stopnia realizacji poszczególnych kryteriów, zwłaszcza w przypadku zastosowania ich ustalonych poziomów referencyjnych.

Rozmytość funkcji celu może przyjmować różne postacie, wyrażające zróżnicowanie kierunku optymalizacji. Można przy tym wyróżnić:

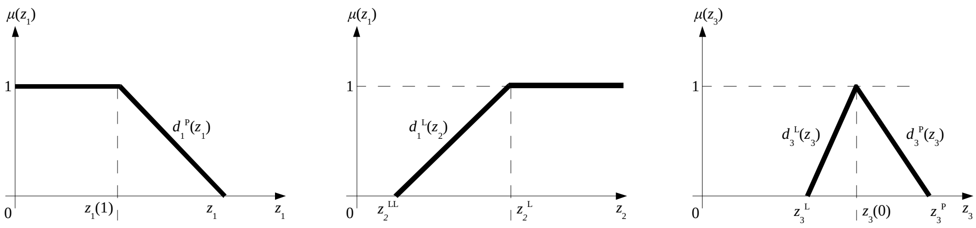
1. Rozmytą minimalizację ($\min_r$, ang. fuzzy min), gdy wymaga się, by wartość funkcji celu była znacząco mniejsza lub, co najwyżej, równa podanej wartości ostrej.
2. Rozmytą maksymalizację ($\max_r$, ang. fuzzy max), w przypadku żądania, by wartość funkcji celu była znacząco większa lub, co najmniej, równa podanej wartości ostrej.
3. Rozmytą równość (equ_r, ang. fuzzy equal), odpowiadającą bliskości względem pewnej wartości ostrej.

Po wyróżnieniu 3 grup kryteriów, oznaczonych kolejno indeksami 1, 2, 3 i odpowiadających kolejno rozmytości celów w sensie: minimalizacji, maksymalizacji i równości, zagadnienie programowania liniowego z rozmytymi celami można przedstawić w postaci ogólnego, α-przekrojowego wielokryterialnego programowania liniowego (ang. generalized α-multi-objective linear programming, Gα-MOLP):

$$
\begin{gathered}
\mathbf{z}_1 = \mathbf{C}_{1\alpha}\mathbf{x} \to \max{}_{\mathrm{r}},\ \mathbf{z}_2 = \mathbf{C}_{2\alpha}\mathbf{x} \to \min{}_{\mathrm{r}},\ \mathbf{z}_3 = \mathbf{C}_{3\alpha}\mathbf{x} \to \mathrm{equ}_{\mathrm{r}} \\
\mathbf{A}_\alpha \cdot \mathbf{x} \le \mathbf{b}_\alpha \qquad (9) \\
\mathbf{x} \ge \mathbf{0}
\end{gathered}
$$

gdzie: symbole $\mathbf{C}_{1\alpha}$, $\mathbf{C}_{2\alpha}$, $\mathbf{C}_{3\alpha}$ oznaczają macierze współczynników funkcji celu, odpowiadające przyjętemu poziomowi przekroju α, związane z kolejno rozpatrywanymi rodzajami rozmytych kryteriów.

Naturalnym sposobem wyrażania rozmytości funkcji celu jest zastosowanie funkcji przynależności $\mu(z)$. Funkcje przynależności rozmytych celów mogą przyjmować różne postacie. Zasadniczo, wymaga się przy tym jedynie, by części funkcji odwzorowujące wzrost lub spadek stopnia przynależności miały ściśle monotoniczny charakter. Przykładowe, spełniające powyższy postulat, liniowe postacie takich funkcji dla trzech rozpatrywanych rodzajów rozmytości celów przedstawiono na rys.4.



Rys. 4. Przykładowe, liniowe postacie funkcji przynależności kryteriów (celów)

Użycie w przypadku rozmytej równości idei bliskości sprawia, że w przypadku celu tego rodzaju nie można bezpośrednio korzystać z kryterium α-optymalności rozwiązań w sensie Pareto. Zamiast tego, wykorzystywana jest koncepcja M-α-optymalności Pareto, stanowiąca rozszerzenie idei α-optymalności, operujące na wartościach funkcji przynależności celów $\mu(z)$.

Jeżeli przy tym jest możliwa agregacja funkcji przynależności poszczególnych kryteriów do postaci μ_D to można rozpatrywane zagadnienie sprowadzić do postaci ogólnego rozmytego α-przekrojowego wielokryterialnego zagadnienia decyzyjnego (ang. fuzzy α-multi-objective decision making problem, Fα-MODMP):

$$\mu_D\big(\mu_1(\mathbf{z}_1), \mu_2(\mathbf{z}_2), \ldots, \mu_k(\mathbf{z}_k), \alpha\big) \to \max \qquad (10)$$

przy przynależności parametrów **C**, **A**, **b** i wartości zmiennych decyzyjnych **x** do zbioru rozwiązań M-α-optymalnych $P(\alpha)$ oraz odpowiadających im α-przekrojowych wartości optymalnych parametrów w Gα-MOLP. Na ogół bardzo trudno przedstawić funkcję μ_D w jawnej postaci, natomiast jest możliwe jej niejawne, wyrażenie. Służy temu rodzaj podejścia interaktywnego.

Wyznaczenie rozwiązań optymalnych wymaga zasadniczo przyjęcia poziomu przekroju α oraz zgromadzenia informacji, pomagających ustalić postać funkcji przynależności kryteriów. Wymagane jest również, analogicznie w stosunku do poziomów odniesienia funkcji celu w przypadku nierozmytych postaci kryteriów, określenie wartości poziomów odniesienia $\bar{\boldsymbol{\mu}}$ dla funkcji przynależności rozmytych celów. W rezultacie rozważane zagadnienie opisuje model:

$$\begin{gathered} v \to \min \\ \bar{\boldsymbol{\mu}} - \boldsymbol{\mu} \le \mathbf{v} \\ \mathbf{A}_\alpha \cdot \mathbf{x} \le \mathbf{b}_\alpha \\ \mathbf{x} \ge \mathbf{0} \end{gathered} \tag{11}$$

gdzie: $\bar{\boldsymbol{\mu}}$, $\boldsymbol{\mu}$ są wektorami odpowiednio: poziomów referencyjnych oraz poziomów funkcji przynależności rozmytych kryteriów.

Zastosowanie nieliniowych postaci części składowych funkcji przynależności celów powoduje, że rozpatrywane zagadnienie przyjmuje postać nieliniową. W celu zapobieżenia temu, w odpowiedni sposób można przekształcić ograniczenia $\bar{\boldsymbol{\mu}} - \boldsymbol{\mu} \le \mathbf{v}$ w modelu (11). Dokonuje się tego [5], wykorzystując wymaganą przy formułowaniu postaci funkcji przynależności celów $\mu_i(z_i)$ monotoniczność ich skrajnych części d_i^{L}, d_i^{P} (por. rys.4). W ten sposób otrzymuje się następującą, ostateczną postać modelu (12):

$$\begin{gathered} v \to \min \\ \underset{i \in \mathrm{I}_1 \cup \mathrm{I}_3}{\forall} \mathbf{C}_\alpha^{\mathrm{L}} \mathbf{x} \le \mathbf{d}_{\mathrm{R}}^{-1} \cdot (\bar{\boldsymbol{\mu}} - \mathbf{v}), \quad \underset{i \in \mathrm{I}_2 \cup \mathrm{I}_3}{\forall} \mathbf{C}_\alpha^{\mathrm{R}} \mathbf{x} \ge \mathbf{d}_{\mathrm{L}}^{-1} \cdot (\bar{\boldsymbol{\mu}} - \mathbf{v}) \\ \mathbf{A}_\alpha^{\mathrm{L}} \cdot \mathbf{x} \le \mathbf{b}_\alpha^{\mathrm{R}} \\ \mathbf{x} \ge \mathbf{0} \end{gathered} \tag{12}$$

gdzie: I_1, I_2, I_3 oznaczają zbiory kryteriów, reprezentujących odpowiednie rodzaje rozmytych celów: $\min_r$, $\max_r$, equ_r, którym odpowiadają określone postacie ograniczeń; $\mathbf{d}_{\mathrm{L}}^{-1}$ i $\mathbf{d}_{\mathrm{P}}^{-1}$ są wektorami, zawierającymi odwrotności wartości, odpowiednio: lewej i prawej części funkcji przynależności poszczególnych kryteriów.

Rozwiązania programu (12) dostarcza wieloetapowa metoda. Jej pierwsza część polega na wyznaczeniu wartości $v = v^*$, dla której uzyskuje się rozwiązanie dopuszczalne:

1. Przyjmowanie postaci funkcji przynależności celów, początkowej wartości parametru: $v = \bar{\mu}_{\max}$, tak długo, aż w wyniku pierwszego kroku metody Simplex zostanie uzyskane rozwiązanie dopuszczalne programu (12).
2. Przyjęcie $v = 1 - \bar{\mu}_{\max}$ i sprawdzenie czy dla tej wartości istnieje dopuszczalne rozwiązanie zagadnienia (12):
    a. jeśli TAK to optymalną wartością jest: $v^* = 1 - \bar{\mu}_{\max}$ i pomija się następny etap,
    b. jeśli NIE to następuje przejście do następnego etapu.

3. Poszukiwanie najmniejszej wartości v^* z przedziału $\langle 1-\bar{\mu}_{\max}, \bar{\mu}_{\max} \rangle$, dla której istnieje dopuszczalne rozwiązanie programu (12) przy pomocy metody połowienia (bisekcji), począwszy od $v = v_1 = \bar{\mu}_{\max} - 0{,}5$. Do badania dopuszczalności rozwiązań można użyć analizy wrażliwości prawych stron ograniczeń modelu rozpatrywanego zagadnienia w metodzie Simplex.

Otrzymana wartość v^* wykorzystywana jest następnie do uzyskania rozwiązania programu liniowego, obejmującego wybrane pojedyncze, reprezentatywne kryterium i następujące ograniczenia:

$$\begin{gathered} \underset{i\in \mathrm{I}_1\cup \mathrm{I}_3}{\forall} \mathbf{C}_\alpha^{\mathrm{L}}\mathbf{x} \le \mathbf{d}_{\mathrm{R}}^{-1}\cdot\left(\bar{\boldsymbol{\mu}} - \mathbf{v}^*\right), \quad \underset{i\in \mathrm{I}_2\cup \mathrm{I}_3}{\forall} \mathbf{C}_\alpha^{\mathrm{R}}\mathbf{x} \ge \mathbf{d}_{\mathrm{L}}^{-1}\cdot\left(\bar{\boldsymbol{\mu}} - \mathbf{v}^*\right) \\ \mathbf{A}_\alpha^{\mathrm{L}} \cdot \mathbf{x} \le \mathbf{b}_\alpha^{\mathrm{R}} \\ \mathbf{x} \ge \mathbf{0} \end{gathered} \tag{13}$$

Po jego uzyskaniu (13) należy zweryfikować jego M-α-optymalność. Służy temu, analogiczny do (8), program liniowy:

$$\begin{gathered} \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i \to \max \\ \mathbf{C}_\alpha^{\mathrm{L}} \cdot \mathbf{x} + \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{C}_\alpha^{\mathrm{L}} \cdot \mathbf{x}^*, \quad \mathbf{C}_\alpha^{\mathrm{R}} \cdot \mathbf{x} + \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{C}_\alpha^{\mathrm{R}} \cdot \mathbf{x}^* \\ \mathbf{A}_\alpha^{\mathrm{L}} \cdot \mathbf{x} \le \mathbf{b}_\alpha^{\mathrm{P}} \\ \mathbf{x} \ge \mathbf{0}, \ \ \boldsymbol{\varepsilon} \ge \mathbf{0} \end{gathered} \tag{14}$$

Korzysta się z niego na podobnych zasadach, jak z programu (8).

Procedura wyboru najlepszego rozwiązania, spośród wygenerowanych rozwiązań M-α-optymalnych zagadnienia Gα-MOLP przedstawia się następująco:

1. Wyznaczenie minimalnych i maksymalnych wartości kryteriów przy α = 0 oraz 1.
2. Ustalenie postaci funkcji przynależności celów $\mu_i(z_i)$.
3. Wybór wartości parametru α oraz wstępnych wartości odniesienia $\bar{\mathbf{z}}$.
4. Wyznaczenie rozwiązania M-α-optymalnego dla przyjętych wartości parametrów.
5. Wyznaczenie wartości współczynników zamiany między funkcjami przynależności a parametrem α i:
   a) akceptacja uzyskanego rozwiązania (oznaczająca koniec obliczeń) lub
   b) uaktualnienie referencyjnych wartości funkcji przynależności kryteriów i poziomu przekroju α na podstawie bieżących wartości tych parametrów i wartości współczynników zamiany i powrót do etapu 3.

3. Podsumowanie i wnioski

Z uwagi na złożoność współczesnych zagadnień decyzyjnych w budownictwie, gospodarce przestrzennej i komunalnej, proces wspomagania decyzji w tych dziedzinach wymaga zastosowania adekwatnych narzędzi optymalizacyjnych. Do grupy takich solidnych i sprawdzonych narzędzi optymalizacyjnych należy PL. Dzięki uzupełnieniu o elementy, pozwalające uwzględniać wpływ wieloaspektowości uwarunkowań, niepełny charakter dostępnej informacji i trudno mierzalność, można przy jego zastosowaniu efektywnie modelować złożoność występujących uwarunkowań.

W pracy przedstawiono różne postaci modeli rozmytego i posybilistycznego programowania liniowego, zaspokajające potrzeby, związane z rozwiązywaniem zagadnień o zróżnicowanych formach. Ujęto w tym także programowanie interaktywne, poszerzające możliwości uczestnictwa i wykorzystania wiedzy ekspertów w trakcie modelowania.

Dzięki zastosowaniu odpowiedniego, coraz szerzej dostępnego oprogramowania narzędziowego [4] można przy ich pomocy efektywnie stosować przedstawione modele do rozwiązywania zagadnień w wymienionych wcześniej dziedzinach.

Literatura

1. Anusz S., Dytczak M., Orłowska B.: Planowanie przestrzenne narzędziem do zarządzania miastem, gminą, regionem. [W:] Knosala R. (red.) Komputerowo zintegrowane Zarządzanie. PTZP, Opole 2010.
2. Zadeh L.A.: Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility. Fuzzy Sets and Systems, 100, Supp.1, 1999, s.9–34.
3. Dytczak M., Czabak J.: Rozmyte programowanie liniowe w podejmowaniu decyzji w szybko zmieniającym się otoczeniu. [W:] Międzynarodowa Konferencja Naukowa Otmuchów 2004 „Społeczne i ekologiczne uwarunkowania transformacji i integracji gospodarczej—problemy oporu wobec przemian“, Opole 2004.
4. Dytczak M., Ginda G.: Programowanie liniowe z czynnikami trudno mierzalnymi. Zeszyty Naukowe Wyższej Szkoły Bankowej w Poznaniu, 2009 (praca złożona do druku).
5. Sakawa M.: Fuzzy Sets and Interactive Multiobjective Optimization. Plenum Press. New York, London, 1993.

Dr hab. inż. Mirosław DYTCZAK
Instytut Gospodarki Przestrzennej i Mieszkalnictwa
ul. Targowa 45, 03-728 Warszawa
tel. (0-22) 619 13 50
e-mail: mdytczak@gmail.com

Dr inż. Grzegorz GINDA
Dr inż. Barbara JASTRZĄBEK
Katedra Badań Operacyjnych w Zarządzaniu
Politechnika Opolska
45-047 Opole, ul. Waryńskiego 4
tel./fax.: (0-77) 454 35 33 / 453 04 71
e-mail: gginda@gmail.com