PROBLEM DYSTRYBUCJI W SYSTEMIE JIT
Z LOSOWYMI PARAMETRAMI

Wojciech BOŻEJKO, Paweł RAJBA, Mieczysław WODECKI

Streszczenie: W pracy jest rozpatrywany problem dystrybucji z najwcześniejszymi oraz najpóźniejszymi terminami dostawy. Zbyt wczesna lub zbyt późna dostawa generuje koszty związane z magazynowaniem. Ponieważ trudno jest jednoznacznie określić niektóre parametry (np. czasy przejazdu), dlatego są one reprezentowane przez rozkłady zmiennych losowych. Problem polega wyznaczeniu harmonogramu dostaw, minimalizującego sumę kosztów. Rozpatrywane zagadnienie jest istotnym uogólnieniem problemu komiwojażera. Przedstawiamy algorytm oparty na metodzie przeszukiwania z tabu oraz badamy jego ogólną stabilność, tj. wpływ losowego zaburzania danych na wartości funkcji celu.

Słowa kluczowe: dystrybucja towaru, nieterminowa dostawa, rozkład normalny, przeszukiwanie z tabu.

1. Wstęp

Pomimo postępującej od lat globalizacji, w wielu dziedzinach gospodarki można zaobserwować zwiększający się popyt na mocno zróżnicowane produkty i usługi, uwzględniające indywidualne oczekiwania odbiorców. Wymusza to dużą elastyczność, terminowość, krótkie serie oraz znaczną różnorodność ofert. Rodzi to podobne problemy, jakie pojawiły się w latach 80. dwudziestego wieku w związku z wprowadzaniem systemów produkcji opartych na idei JIT (ang. *Just in Time*, tj. dokładnie na czas), ponieważ coraz większą rolę odgrywała organizacja dostaw oraz dystrybucji gotowego produktu. Generuje to wiele nowych problemów optymalizacyjnych silnie powiązanych ze zmieniającym się ciągle otoczeniem. Pomimo że dotyczy to produkcji i usług często o charakterze regionalnym, to jednak są to problemy złożone, z dużą liczbą ograniczeń, nieregularnymi funkcjami celu i zazwyczaj silnie NP-trudne. Stanowią one inspirację do rozwoju nowych metod konstruowania szybkich algorytmów aproksymacyjnych uwzględniających niepewne (często losowe) parametry.

Jedną z dynamicznie zmieniających się w ostatnich latach dziedzin gospodarki jest przemysł spożywczy związany z produkcją wyrobów o krótkim okresie przydatności do spożycia (bez sztucznych konserwantów). Są to produkty nie podlegające magazynowaniu, które w krótkim czasie należy dostarczyć do odbiorcy. W procesie produkcji stosuje się bardzo rygorystyczne normy i standardy, przez co proces ten jest niemal w pełni zdeterminowany przez technologię. Dlatego też istotne znaczenie w ostatecznym rachunku ekonomicznym mają koszty dystrybucji. Przy czym podstawowym wymaganiem jest dostarczenie produktu, do każdego z wielu odbiorców, w ściśle określonym przedziale czasowym. Mamy w tym przypadku do czynienia z istotnym uogólnieniem silnie NP-trudnego problemu komiwojażera.

Podobne problemy pojawiają się w praktyce budowlanej, gdzie z przyczyn technologicznych lub z powodu braku miejsca na placu budowy pewne materiały (np.

beton) lub elementy (np. konstrukcje o znacznych rozmiarach) nie mogą być magazynowane. Należy je dostarczać bezpośrednio, w ściśle określonych przedziałach czasowych. Zbyt wczesne lub zbyt późne ich dostarczenie generuje dodatkowe koszty związane z realizacją kontraktu. Wymusza to organizację procesu budowlanego podobnie, jak w systemach produkcji JIT z uwzględnieniem ograniczeń typu E/T (ang. *earliness*/*tardiness*, Wodecki [1]). Stosowane do tej pory klasyczne metody harmonogramowania w budownictwie CPM, PERT są już niewystarczające.

Na podstawie praktyki zarządzania powszechnie uważa się, że w dużej części przypadków mamy do czynienia z niepewnymi danymi. Zdarza się ponadto, że już w trakcie realizacji ulegają zmianie pewne wartości parametrów, co zazwyczaj prowadzi do wyraźnego pogorszenia się efektywności na skutek utraty optymalności. Niepewność może mieć charakter losowy i wówczas przyjmuje się, że wartości danych liczbowych są realizacjami zmiennych losowych o znanych lub nieznanych parametrach. Prowadzi to do interesujących i trudnych probabilistycznych modeli optymalizacyjnych bazujących często na znaczących uogólnieniach klasycznych, znanych w literaturze problemów.

W pracy rozpatrujemy problem, w którym należy dostarczyć pewien produkt z magazynu do wielu odbiorców. Znane są czasy przejazdu pomiędzy magazynem, a każdym z odbiorców oraz pomiędzy odbiorcami. Ze względu na specyfikę produktu (czas niezbędny na rozprowadzenie), należy go dostarczyć do odbiorcy w z góry określonym przedziale czasowym. Zbyt wczesna dostawa generuje koszty związane z jego magazynowaniem, a zbyt późna – nie gwarantuje zbytu całości, a więc także generuje dodatkowe koszty. Ponieważ trudno jest jednoznacznie określić niektóre parametry (np. czasy przejazdu), dlatego są one reprezentowane przez rozkłady zmiennych losowych. Problem polega na takim zaplanować harmonogramu dostaw, aby suma kosztów była minimalna. Jest więc istotnym uogólnieniem silnie NP-trudnego problemu komiwojażera. Do jego rozwiązania stosujemy algorytm oparty na metodzie przeszukiwania z tabu (ang. *Tabu Serach*, w skrócie *TS*). Przedstawiamy dwie wersje algorytmu, odpowiednio dla danych deterministycznych i probabilistycznych (reprezentowanych przez rozkłady zmiennych losowych). Badamy także ich ogólną stabilność, tj. wpływ losowego zaburzenia danych na wartości funkcji celu. Niniejsza praca stanowi kontynuację studiów autorów (Rajba, Wodecki [2, 3]) nad zastosowaniem elementów probabilistyki w modelowaniu oraz rozwiązywaniu problemów optymalizacji kombinatorycznej. Problemom optymalizacji probabilistycznej są poświęcone obszerne rozprawy doktorskie Deana [4] i Vondráka [5].

2. Problem dystrybucji

Dany jest zbiór n odbiorców $J = \{1, 2, \ldots, n\}$, magazyn oznaczany cyfrą 0, a także spełniająca warunek trójkąta macierz symetryczna *czasów przejazdów* $Z = (z_{ij})_{i=0, j=0}^{n}$ pomiędzy magazynem i każdym z odbiorców oraz pomiędzy poszczególnymi odbiorcami. Dla dowolnego odbiorcy $i \in J$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, przez e_i, d_i, u_i, w_i oraz p_i oznaczamy odpowiednio: *najwcześniejszy* i *najpóźniejszy* żądany termin przybycie, *współczynnki kary* za zbyt wczesne lub zbyt późne przybicie oraz *czas rozładunku*. Jeżeli ustalona jest kolejność odbiorców (trasa) oraz C_i ($i = 1, 2, ..., n$) jest *terminem przybycia*, to

$$V_i = \begin{cases} 0, & \text{jeżeli } C_i \geq e_i, \\ 1, & \text{jeżeli } C_i < e_i, \end{cases} \qquad U_i = \begin{cases} 0, & \text{jeżeli } C_i \leq d_i, \\ 1, & \text{jeżeli } C_i > d_i, \end{cases}$$

nazywamy odpowiednio *przyśpieszeniem* i *spóźnieniem*. Wówczas, $V_i \cdot u_i$ jest *karą* za zbyt wczesne, a $T_i \cdot w_i$ - zbyt późne, przybycie.

Rozpatrywany w pracy problem dystrybucji w systemie JIT (w skrócie oznaczany przez **DET**) polega na wyznaczeniu takiej kolejności odbiorców, dla której całkowita kara

$$\sum_{i=1}^{n} (u_i V_i + w_i U_i)$$

jest minimalna.

Niech Φ będzie zbiorem wszystkich permutacji elementów z J. Koszt permutacji $\pi \in \Phi$ (tj. suma kar, gdy odbiorcy są odwiedzani w kolejności π) wynosi

$$W(\pi) = \sum_{i=1}^{n} (z_{\pi(i)} V_{\pi(i)} + w_{\pi(i)} U_{\pi(i)}), \tag{1}$$

przy czym termin przybycia do odbiorcy $\pi(i) \in J$

$$C_{\pi(i)} = \sum_{j=0}^{i-1} c_{\pi(j),\pi(j+1)} + \sum_{j=1}^{i-1} p_{\pi(j)}.$$

Pierwsza suma jest czasem przejazdu z magazynu do odbiorcy $\pi(i)$, a druga – sumą czasów rozładunku u odbiorców $\pi(1), \pi(2), ..., \pi(i-1)$.

Rozpatrywany problem sprowadza się więc do wyznaczenia permutacji optymalnej $\pi^* \in \Phi$ czyli takiej, dla której

$$W(\pi^*) = \min_{\pi \in \Phi} W(\pi).$$

Problem ten ma bezpośredni związek z problemem komiwojażera, jak i problemem szeregowania zadań na jednej maszynie z przezbrojeniami (oznaczanym w literaturze przez $1 | s_{ij} | \sum w_i T_i$, Bożejko i Wodecki [6]) oraz problemem szeregowania zadań na jednej maszynie z najwcześniejszymi i najpóźniejszymi terminami zakończenia (oznaczanym przez $1 || \sum (u_i \cdot E_i + w_i \cdot T_i)$, Wodecki [1]). Ponieważ jest uogólnieniem każdego z powyższych, silnie NP-trudnych problemów, należy więc także do klasy problemów silnie NP-trudnych. Algorytmy dokładne pozwalają na efektywne wyznaczenie rozwiązań optymalnych dla podobnych problemów jedynie wówczas, gdy rozmiar zagadnienie nie przekracza 50 (80 w środowisku wieloprocesorowym, Wodecki [7]). Dlatego w praktyce stosuje się algorytmy przybliżone (głównie typu popraw). Z tego powodu, do rozwiązywania będzie stosowany algorytm przybliżony oparty na metodzie przeszukiwania z tabu (ang. *Tabu Serach*). Jest to metoda w pełni deterministyczna, którą z powodzeniem stosowano przy rozwiązywaniu podobnych zagadnień, Wodecki [8].

2.1. Metoda przeszukiwania z tabu

Do rozwiązywania problemów NP-trudnych stosowane są przede wszystkim algorytmy przybliżone. Z praktycznego punktu widzenia są one zupełnie wystarczające, bowiem wiele z nich znajduje rozwiązania jedynie nieznacznie różniące się od optymalnych. Często w konstrukcjach takich algorytmów jest stosowana metoda przeszukiwania z tabu. Jej głównymi elementami są:

- otoczenie – podzbiór zbioru rozwiązań dopuszczalnych, którego elementy są przeszukiwane,
- ruch – funkcja, przekształcająca jedno rozwiązanie w inne,
- lista tabu – lista zawierająca atrybuty pewnej liczby ostatnio rozpatrywanych rozwiązań, implementowana zazwyczaj jako kolejka FIFO,
- warunek zakończenia – często określany przez liczbę iteracji.

Niech W będzie funkcją celu, $\pi \in \Phi$ dowolną permutacją (startową), L_{TS} listą tabu, a π^* najlepszym do tej pory znalezionym rozwiązaniem (za rozwiązanie startowe π oraz π^* można przyjąć dowolną permutację).

Algorytm_Tabu_Search

do
  Wyznaczyć otoczenie $N(\pi)$;
  Usunąć z $N(\pi)$ permutacje których atrybuty są na liście L_{TS};
  Znaleźć $\delta \in N(\pi)$, takie że $W(\delta) = \min\{W(\beta): \beta \in N(\pi)\}$;
  if $W(\delta) < W(\pi^*)$ **then** $\pi^* := \delta$;
  Umieścić atrybuty δ na liście L_{TS};
  $\pi := \delta$;
while (*warunek zakończenia*).

W dalszej części krótko przedstawimy główne elementy algorytmu.

2.1.1. Ruch i otoczenie

Niech $\pi = (\pi(1),\ldots,\pi(n))$ będzie permutacją (kolejnością odwiedzania odbiorców), a $P(\pi) = \{\pi(i):\ C_{\pi(i)} < e_{\pi(i)} \text{ lub } C_{\pi(i)} > d_{\pi(i)}\}$ zbiorem odbiorców, do których dotarto zbyt wcześnie lub zbyt późno. Dla zadania $\pi(k) \in P(\pi)$, niech π_l^k ($l = 1, 2,\ldots, k-1,\ k+1,\ k+2,\ldots, n$) będzie permutacją otrzymaną z π przez zamianę miejscami $\pi(k)$ z $\pi(l)$. Mówimy, że permutacja π_l^k została wygenerowana przez ruch s_l^k (tj. $\pi_l^k = s_l^k(\pi)$) *typu zamień* (ang. *swap move*). Przez $M(\pi(k))$ oznaczmy zbiór wszystkich takich ruchów elementu $\pi(k)$ oraz niech $M(\pi) = \sum_{\pi(k)\in M(\pi)} M(\pi(k))$.

Otoczeniem permutacji π jest zbiór

$$N(\pi)=\left\{s_l^k(\pi):\ s_l^k\in M(\pi)\right\}.$$

Przy implementacji algorytmu z otoczenia usuwa się permutacje, których atrybuty znajdują się na liście ruchów zakazanych L_{TS}.

2.1.2. Lista ruchów zakazanych

Aby zapobiec powstawaniu cykli (powrotu do tej samej permutacji po niewielkiej liczbie iteracji), pewne atrybuty każdego ruchu zapamiętuje się na liście ruchów zakazanych. Obsługiwana jest ona na zasadzie kolejki FIFO. Wykonując ruch $s_j^r\in M(\pi)$ (tj. generując z $\pi\in\Phi$ permutację π_j^r) na listę tabu zapisujemy atrybuty tego ruchu, czyli trójkę $(\pi(r), j, W(\pi_j^r))$. Załóżmy, że rozpatrujemy ruch $s_l^k\in M(\beta)$ generujący permutację β_l^k. Jeżeli na liście jest trójka (v, j, Ψ) taka, że $\beta(k)=v$, $l=j$ oraz $W(\beta_l^k)\geq\Psi$, to ruch taki usuwamy ze zbioru $M(\beta)$.

Do rozwiązywania rozpatrywanego w pracy problemu **DET** zaadoptowano bardzo efektywny algorytm rozwiązywania problemu $1\|\sum w_iT_i$, którego dokładny opis przedstawiono w pracy [9].

3. Randomizacja

W pracy jest rozpatrywany także model losowy problemu, w którym czasy rozładunku, żądane terminy przybycia oraz czasy przejazdu są określone przez niezależne zmienne losowe o rozkładzie normalnym. W literaturze rozpatrywano problemy optymalizacji kombinatorycznej (w tym szeregowania zadań) zazwyczaj jedynie z pojedynczymi losowymi parametrami. Rozkładem jednostajnym lub normalnym (Van den Akker i Hoogeveen [5]) lub wykładniczym (Pinedo [10]).

Niech $((p_i,u_i,w_i,e_i,d_i)_{i=1}^n,(z_{ij})_{i=0,j=0}^{n+1})$ będzie przykładem danych deterministycznych dla rozpatrywanego w pracy problemu. Proces randomizacji polega na wyznaczeniu zmiennych losowych reprezentujących poszczególne parametry. Ponieważ zakładamy, że wartości oczekiwane tych zmiennych są równe odpowiednim wartością deterministycznym, dlatego przyjmujemy następujące rozkłady: $\tilde{p}_i\sim N(p_i,\sigma_{p_i})$, $\tilde{d}_i\sim N(d_i,\sigma_{d_i})$, $\tilde{e}_i\sim N(e_i,\sigma_{e_i})$, $\tilde{z}_{ij}\sim N(z_{ij},\sigma_{z_{ij}})$ (odchylenia standardowe zostaną zdefiniowane w dalszej części pracy). Wówczas, dla dowolnej permutacji $\pi\in\Phi$, termin przybycia do odbiorcy $\pi(i)$ jest zmienną losową postaci:

$$\tilde{C}_{\pi(i)}=\sum_{j=1}^{i-1}\tilde{p}_{\pi(j)}+\sum_{j=0}^{i-1}\tilde{z}_{j,j+1},$$

a funkcji celu (1) odpowiada zmienna losowa

$$\tilde{W}(\pi)=\sum_{i=1}^{n}\left(u_{\pi(i)}\tilde{V}_{\pi(i)}+w_{\pi(i)}\tilde{U}_{\pi(i)}\right). \tag{2}$$

W takim przypadku, do oceny rozwiązań (porównań permutacji ze zbioru Φ) stosuje się zazwyczaj ważone kombinacje liniowe momentów centralnych zmiennej losowej (2). Z przeprowadzonych eksperymentów obliczeniowych wynika, że wystarczy uwzględnić jedynie wartość oczekiwaną oraz ewentualnie odchylenie standardowe (momenty wyższych rzędów mają niewielki wpływ na otrzymane wyniki). W związku z tym do oceny rozwiązania będziemy stosowali dwie funkcje:

$$W_1(\pi) = E(\tilde{W}(\pi)) = \sum_{i=1}^{n} \left(u_{\pi(i)} E(\tilde{V}_{\pi(i)}) + w_{\pi(i)} E(\tilde{U}_{\pi(i)}) \right), \tag{3}$$

$$W_2(\pi) = E(\tilde{W}(\pi)) + D^2(\tilde{W}(\pi)) =$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left(u_{\pi(i)} (E(\tilde{V}_{\pi(i)}) + D^2(\tilde{V}_{\pi(i)})) + w_{\pi(i)} (E(\tilde{U}_{\pi(i)}) + D^2(\tilde{U}_{\pi(i)})) \right). \tag{4}$$

W celu uproszczenia zapisu, w dalszej części tego rozdziału przyjmujemy, że rozpatrywana permutacja π jest tożsamościowa, tj. $\pi = (1, \ldots, n)$. Korzystając z definicji rozkładów, zmienna losowa reprezentująca termin przybycia do i-tego odbiorcy ma rozkład normalny

$$\tilde{C}_i \sim N\left(\sum_{j=1}^{i-1} p_j + \sum_{j=0}^{i-1} z_{j,j+1}, \sqrt{\sum_{j=1}^{i-1} \sigma_{p_j}^2 + \sum_{j=0}^{i-1} \sigma_{z_{j,j+1}}^2} \right). \tag{5}$$

Definiujemy zmienne losowe reprezentujące zbyt wczesne lub zbyt późne przybycia

$$\tilde{V}_i = \begin{cases} 0, & \text{jeżeli } \tilde{C}_i \geq \tilde{e}_i, \\ 1, & \text{jeżeli } \tilde{C}_i < \tilde{e}_i, \end{cases} \qquad \tilde{U}_i = \begin{cases} 0, & \text{jeżeli } \tilde{C}_i \leq \tilde{d}_i, \\ 1, & \text{jeżeli } \tilde{C}_i > \tilde{d}_i, \end{cases}$$

oraz pomocniczo zakresy

$$\tilde{G}_i = \tilde{C}_i - \tilde{e}_i, \qquad \tilde{H}_i = \tilde{C}_i - \tilde{d}_i.$$

Na podstawie definicji obu zmiennych oraz równości (5) można zauważyć, że powyższe funkcje mają także rozkłady normalne

$$\tilde{G}_i \sim N\left(\sum_{j=1}^{i-1} p_j + \sum_{j=0}^{i-1} z_{j,j+1} - e_i, \sqrt{\sum_{j=1}^{i-1} \sigma_{p_j}^2 + \sum_{j=0}^{i-1} \sigma_{z_{j,j+1}}^2 + \sigma_{e_i}^2} \right),$$

$$\tilde{H}_i \sim N\left(\sum_{j=1}^{i-1} p_j + \sum_{j=0}^{i-1} z_{j,j+1} - d_i, \sqrt{\sum_{j=1}^{i-1} \sigma_{p_j}^2 + \sum_{j=0}^{i-1} \sigma_{z_{j,j+1}}^2 + \sigma_{d_i}^2} \right).$$

Po wykonaniu dalszych obliczeń można udowodnić równości:

$$E(\tilde{V}_i) = E(\tilde{V}_i^2) \text{ oraz } E(\tilde{U}_i) = E(\tilde{U}_i^2).$$

Korzystając z nich, otrzymujemy

$$E(\tilde{V}_i) = P(\tilde{C}_i < \tilde{e}_i) = P(\tilde{C}_i - \tilde{e}_i < 0) = \Phi_{\tilde{G}_i}(0),$$
$$D^2(\tilde{V}_i) = P(\tilde{G}_i < 0) - (P(\tilde{G}_i < 0))^2 = \Phi_{G_i}(0) - (\Phi_{G_i}(0))^2 = \Phi_{\tilde{G}_i}(0)(1 - \Phi_{\tilde{G}_i}(0)),$$
$$E(\tilde{U}_i) = P(\tilde{C}_i > \tilde{d}_i) = P(\tilde{H}_i > 0) = 1 - \Phi_{\tilde{H}_i}(0),$$
$$D^2(\tilde{U}_i) = P(\tilde{C}_i > \tilde{d}_i) - P(\tilde{C}_i > \tilde{d}_i)^2 = 1 - \Phi_{\tilde{H}_i}(0) - (1 - \Phi_{\tilde{H}_i}(0))^2 = (1 - \Phi_{\tilde{H}_i}(0))\Phi_{\tilde{H}_i}(0),$$

gdzie $\Phi_{\tilde{H}_i}$ oraz $\Phi_{\tilde{G}_i}$ są dystrybuantami zmiennych losowych o rozkładzie normalnym odpowiednio: $\tilde{H}_i$ oraz $\tilde{G}_i$.

Ostatecznie, funkcje W_1 i W_2 określone odpowiednio przez (3) i (4) przyjmują postać:

$$\begin{aligned} W_1(\pi) &= \sum_{i=1}^{n} \left(u_i E(\tilde{V}_i) + w_i E(\tilde{U}_i) \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(u_i \Phi_{\tilde{G}_i}(0) + w_i (1 - \Phi_{N(h_i, \sigma_{h_i})}(0)) \right) \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned} W_2(\pi) &= \sum_{i=1}^{n} \left(u_i \left(E(\tilde{V}_i) + D^2(\tilde{V}_i) \right) + w_i \left(E(\tilde{U}_i) + D^2(\tilde{U}_i) \right) \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(u_i (\Phi_{\tilde{G}_i}(0)(2 - \Phi_{\tilde{G}_i}(0))) + w_i (1 - (\Phi_{\tilde{H}_i}(0))^2) \right) \end{aligned} \tag{7}$$

Niech AD będzie algorytmem (nazywanym dalej *deterministycznym*) opartym na metodzie przeszukiwania z tabu rozwiązywania problemu dystrybucji **DET** z kryterium optymalności (1), którego główne elementy opisano w Rozdziale 2.1. Przez AP oznaczamy modyfikację algorytmu AD dla losowych danych, tj. algorytm, w którym jako kryterium porównawcze rozwiązań przyjmuje się funkcje (6) lub (7). W dalszej części algorytmy te będziemy nazywali *probabilistycznymi*.

4. Stabilność algorytmów

Stabilność jest pewną miarą umożliwiającą oszacowanie wpływu zaburzeń danych na zmiany wartości funkcji celu. W pierwszej kolejności przedstawiamy metodę generowania zbioru danych na bazie których będzie badana stabilność algorytmów.

Niech $\delta = ((p_i, u_i, w_i, e_i, d_i)_{i=1}^{n}, (z_{ij})_{i=0, j=0}^{n+1})$ będzie pewnym przykładem danych (deterministycznych) dla rozpatrywanego problemu dystrybucji, a $D(\delta)$ zbiorem danych generowanych z δ przez zaburzenie odpowiednich parametrów. Zaburzenie polega na zmianie parametrów p_i, e_i, d_i, z_{ij} na losowo wyznaczone wartości (tj. liczby generowane zgodnie z pewnym przyjętym rozkładem, np. jednostajnym, normalnym, itd.). Dowolny element zbioru $D(\delta)$ jest postaci $((p'_i, u'_i, w'_i\, e'_i, d'_i)_{i=1}^{n}, (z'_{i,j})_{i=0,\, j=0}^{n+1})$, gdzie zaburzone parametry $p'_i, e'_i, d'_i, z'_{i,j}$ są realizacjami ustalonych zmiennych losowych. Wobec tego, zbiór $D(\delta)$ zawiera przykłady danych deterministycznych dla problemu **DET** różniące się pomiędzy sobą wartościami pewnych parametrów.

Niech $A = \{AD, AP\}$, gdzie AD i AP są odpowiednio algorytmem deterministycznym oraz probabilistycznym dla problemu **DET**. Przez π_δ oznaczamy rozwiązanie (permutację) wyznaczoną przez algorytm A dla danych δ. Dalej, niech $W(A, \pi_\delta, \varphi)$ będzie kosztem dystrybucji (1) dla przykładu φ w kolejności dostawy określonej przez rozwiązanie (permutację) π_δ wyznaczoną przez algorytmem A dla danych δ. Wówczas

$$\Delta(A, \delta, D(\delta)) = \frac{1}{|D(\delta)|} \sum_{\varphi \in D(\delta)} \frac{W(A, \pi_\delta, \varphi) - W(AD, \pi_\varphi, \varphi)}{W(AD, \pi_\varphi, \varphi)},$$

nazywamy *stabilnością rozwiązania* π_δ (przykładu δ) wyznaczonego przez algorytm A na zbiorze danych zaburzonych $D(\delta)$. Wyznaczając π_φ, za rozwiązanie startowe w algorytmie popraw A przyjęto π_δ (wówczas, $W(\pi_\delta, \varphi) - W(\pi_\varphi, \varphi) \geq 0$). Wartość wyrażenia $\Delta(A, \delta, D(\delta))$ jest średnim błędem względnym najlepszego rozwiązania π_δ w stosunku do najlepszych rozwiązań wyznaczonych, dla każdego przykładu danych zaburzonych $\varphi \in D(\delta)$.

Niech Ω będzie zbiorem przykładów deterministycznych dla rozpatrywanego problemu **DET**. *Współczynnik stabilności algorytmu* A na zbiorze Ω definiujemy następująco:

$$S(A, \Omega) = \frac{1}{|\Omega|} \sum_{\delta \in \Omega} \Delta(A, \delta, D(\delta)). \tag{8}$$

Przedstawiona powyżej metoda badania stabilności algorytmów była stosowana w pracach [10] i [3].

5. Eksperymenty obliczeniowe

W celu zbadania stabilności, przedstawionych w poprzednich rozdziałach, algorytmów: deterministycznego AD oraz probabilistycznego AP, przeprowadzono eksperymenty obliczeniowe. Dane deterministyczne wygenerowano na bazie przykładów pobranych z biblioteki OR-Library [9] (są to dane dla jednomaszynowego problemy szeregowania zadań z minimalizacją sumy kosztów spóźnień, $1||\sum_i w_i T_i$). Dla każdego $n = 40, 50$ i 100 dane te zawierają po 125 przykładów (trójek (p_i, w_i, d_i), $i = 1, 2, ..., n$) generowanych losowo według rozkładu jednostajnego. Wartości p_i z przedziału $[1,100]$, w_i z przedziału $[1,10]$, a d_i z przedziału $[P(1 - TF - RDD/2), P(1 - TF + RDD/2)]$, gdzie $P = \sum_{i=1}^{n} p_i$, $RDD, TF \in \{0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0\}$. Dla każdej pary RDD i TF generowano 5 instancji.

W sumie daje to 375 przykładów.

Następnie, każdy przykład uzupełniono o wartości najwcześniejszych żądanych terminów przybycia e_i oraz współczynniki funkcji kary u_i, generowane jednostajnie odpowiednio z przedziału $[0, d_i / 2]$ i $[1,10]$ $(i = 1, 2, ..., n)$ a także tablicę czasów przejazdu $(z_{ij})_{i=0, j=0}^{n+1}$, której poszczególne elementy generowano przedziału $[1,100]$. Przez Ω. oznaczmy tak wyznaczony zbiór danych deterministycznych dla problemu dystrybucji.

Dla każdego przykładu danych deterministycznych $\delta \in \Omega$ wyznaczono odpowiadający mu przykład danych probabilistycznych $\tilde{\delta}$, tj. odpowiednie ciągi zmiennych losowych o rozkładzie normalnym, przy czym: $\tilde{p}_i \sim N(p_i, c \cdot p_i)$, $\tilde{e}_i \sim N(e_i, c \cdot e_i)$, $\tilde{d}_i \sim N(d_i, c \cdot d_i)$, $\tilde{z}_{ij} \sim N(z_{ij}, c \cdot z_{ij})$, gdzie $c \in \{0.01, 0.02, \ldots, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5\}$ (metoda randomizacji została opisana w rozdziale 3). Zbiór tych danych (zwanych probabilistycznymi) oznaczymy przez Ω. Obliczenia algorytmu deterministycznego *AD* wykonano na przykładach ze zbiory Ω, a algorytmu probabilistycznego *AP* – na przykładach ze zbioru $\tilde{\Omega}$. Aby porównać stabilność obu algorytmów, dla każdego przykładu danych deterministycznych $\delta = ((p_i, u_i, w_i, e_i, d_i)_{i=1}^{n}, (z_{ij})_{i=0, j=0}^{n})$, $\delta \in \Omega$ wygenerowano 100 przykładów danych zaburzonych, których zbiór oznaczamy przez $D(\delta)$. Zaburzenie polega na zmianie wartości p_i, e_i, d_i, z_{ij} na losowo wyznaczone wielkości generowane zgodnie z odpowiednimi rozkładami: $N(p_i, c \cdot p_i)$, $N(e_i, c \cdot e_i)$, $N(d_i, c \cdot d_i)$, $N(s_{ij}, c \cdot z_{ij})$. W sumie wyznaczono 75000 przykładów danych zaburzonych (po 37500 dla każdego przykładu ze zbioru Ω). Przykłady te zostały następnie rozwiązane przez algorytm *AD*. Otrzymane wyniki stanowiły podstawę do wyznaczenia współczynnika stabilności (8). Przy każdym uruchomianiu algorytmu za permutację startową przyjęto $\pi = (1, 2, \ldots, n)$, a ponadto:

- długość listy ruchów zakazanych: *n*,
- liczba iteracji algorytmu: $n/2$ lub *n*.

W tabeli 1 przedstawiono wyniki algorytmu deterministycznego *AD* oraz dwóch wersji algorytmu probabilistycznego *AP*. W wersji pierwszej, jako kryterium porównawcze rozwiązań jest stosowana wartość oczekiwana funkcji celu (6), a w drugiej – suma wartości oczekiwanej i odchylenia standardowego (7). Obliczenia wykonano dla liczby iteracji algorytmów (warunek zatrzymania) równej $n/2$ oraz *n*.

Tab. 1. Stabilności (8) algorytmu deterministycznego *AD* oraz probabilistycznego *AP*.

Liczba zadań *n*	Liczba iteracji *n/2*			Liczba iteracji *n*		
	AD	*AP**	*AP***	*AD*	*AP**	*AP***
40	0,39	0,32	0,33	0,50	0,37	0,40
50	0,40	0,34	0,34	0,50	0,41	0,42
100	0,50	0,37	0,37	0,58	0,48	0,47
Średnia	**0,43**	**0,34**	**0,35**	**0,53**	**0,42**	**0,43**

* kryterium $W_1(\pi) = \sum_{i=1}^{n} \left(u_{\pi(i)} E(\tilde{V}_{\pi(i)}) + w_{\pi(i)} E(\tilde{U}_{\pi(i)}) \right)$,

** kryterium $W_2(\pi) = \sum_{i=1}^{n} \left(u_{\pi(i)} \left(E(\tilde{V}_{\pi(i)}) + D^2(\tilde{V}_{\pi(i)}) \right) + w_{\pi(i)} \left(E(\tilde{U}_{\pi(i)}) + D^2(\tilde{U}_{\pi(i)}) \right) \right)$.

Na podstawie zamieszczonych wyników można stwierdzić, że bez względu na liczbę iteracji, algorytm probabilistyczny (w obu wersjach) ma mniejszy o kilkadziesiąt procent współczynnik stabilności niż algorytm deterministyczny. Proporcje te są podobne zarówno dla *n*/2, jak i dla *n* iteracji. Niestety, na podstawie zamieszczonych wyników nie można jednoznacznie stwierdzić, które z kryterium wyboru (6) czy (7) stosowane w algorytmie probabilistycznym daje stabilniejsze rozwiązania.

Porównując wyniki, pewnym zaskoczeniem może być zwiększanie się współczynnika stabilności (tj. pogorszenie stabilności) wraz ze wzrostem liczby iteracji. Dotyczy to zarówno algorytmu deterministycznego jak i probabilistycznego. Wynika to z faktu, że lepsze rozwiązania (a takie otrzymano po dwukrotnym zwiększeniu liczby iteracji) są bardziej wrażliwe na wszelkie zaburzenia danych. Po prostu, dla „słabego" rozwiązania zaburzenie danych może spowodować wręcz poprawę wartości funkcji celu.

6. Uwagi i wnioski

W pracy przedstawiono metody modelowania niepewnych danych przy pomocy zmiennych losowych o rozkładzie normalnym, który dobrze opisuje „naturalną" losowość zależną od pogody, popytu, itp. Przedstawiono konstrukcję algorytmu opartego na metodzie przeszukiwania z tabu dla pewnego problemu optymalizacji kombinatorycznej polegającego na dostarczeniu produktów z magazynu do odbiorców, w ściśle określonych przedziałach czasowych. Przeprowadzono eksperymenty obliczeniowe w celu zbadania stabilności algorytmów, tj. wpływu zaburzeń parametrów na zmiany wartości funkcji celu. Otrzymane wyniki jednoznacznie wskazują, że znacznie stabilniejsze są algorytmy probabilistyczne tj. algorytmy, w których za kryterium porównawcze rozwiązań przyjęto sumę momentów centralnych losowej funkcji celu. Zastosowanie elementów probabilistyki w adaptacji metody przeszukiwania z tabu pozwala skutecznie rozwiązywać problemy z niepewnymi danymi. Dotyczy to wielu trudnych praktycznych zagadnień.

Dodatkowe informacje

Praca częściowo finansowana z projektu badawczego MNiSW Nr N N514 232237.

Literatura

1. Bożejko W., Wodecki M., Solving Permutational Routing Problems by Population-Based Metaheuristics. Computers & Industrial Engineering, 57, 2009, s. 269-276.
2. Dean B.C., Approximation algorithms for stochastic scheduling problems. PhD thesis, MIT, 2005.
3. OR Library http://www.ms.ic.ac.uk/info.html
4. Pinedo M.: Stochastic Scheduling with Release Dates and Due Dates. Operations Research, Vol. 31, No. 3, 1983, s. 559-572.
5. Rajba P., Wodecki M., Jednomaszynowy problem szeregowania zadań z probabilistycznymi czasami. Automatyzacja Procesów Dyskretnych, Teoria i zastosowania (red. A. Świerniak, J. Krystek), 2010, s. 135-142.
6. Rajba P., Wodecki M., Stability of scheduling with random process times on one machine. Applicationes Mathematicea (w druku), 2010.
7. Van den Akker M., Hoogeveen H., Minimizing the number of late jobs in a stochastic setting usinga chance constraint. J. Sched., 11, 2008, 59–69.

8. Vondrák J., Probabilistic methods in combinatorial and stochastic optimization. PhD, MIT, 2005.
9. Wodecki M., A block approach to earliness-tardiness scheduling problems. International Journal on Advanced Manufacturing Technology, 40, 2009, s. 797-807.
10. Wodecki M., A Branch-and-Bound Parallel Algorithm for Single-Machine Total Weighted Tardiness Problem. International Journal on Advanced Manufacturing Technology, 37, Nr 9-10, 2008, s. 996-1004.
11. Wodecki M., Metody agregacji w problemach optymalizacji dyskretnej. Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 2009.

Dr Wojciech BOŻEJKO
Instytut Informatyki Automatyki i Robotyki
Politechnika Wrocławska
50-372 Wrocław, ul. Janiszewskiego 11/17
e-mail: wbo@ict.pwr.wroc.pl

Mgr Paweł RAJBA
Instytut Informatyki
Uniwersytet Wrocławski
50-383 Wrocław, ul.Joliot-Curie
e-mail: pawel.rajba@ii.uni.wroc.pl

Dr Mieczysław WODECKI
Instytut Informatyki
Uniwersytet Wrocławski
50-383 Wrocław, ul.Joliot-Curie
e-mail: mwd@ii.uni.wroc.pl