

# ANALIZA FRAKTALNA STRUKTURY GEOMETRYCZNEJ POWIERZCHNI

Józef GAWLIK, Wojciech MAGDZIARCZYK, Leszek WOJNAR

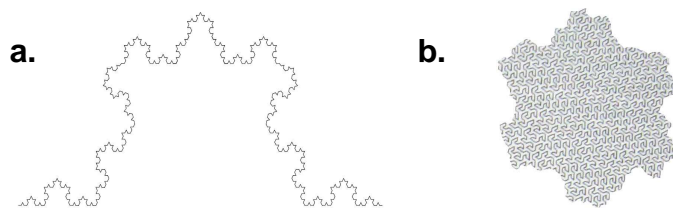
**Streszczenie:** Warstwa wierzchnia ogrywa zasadniczą rolę w procesie eksploatacji maszyn i urządzeń technologicznych. Struktura geometryczna powierzchni jest kształtowana w procesie wytwarzania elementów, rozumianym jako ciąg określonych operacji technologicznych. Charakterystyka warstwy wierzchniej jest określana poprzez parametry geometryczne i fizyczne. Do parametrów geometrycznych jest zaliczany między innymi wymiar fraktalny. W referacie omówiono pojęcie wymiaru fraktalnego. Przedstawiono przykład analizy izotropowej struktury geometrycznej powierzchni (SGP) ukształtowanej w procesie obróbki elektroerozyjnej. Wyznaczono wymiar fraktalny dla badanych powierzchni. Poddano dyskusji uzyskane wyniki.

**Słowa kluczowe:** struktura geometryczna powierzchni, wymiar fraktalny, metody wyznaczania, program Aphelion.

## 1. Wprowadzenie

Ocena cech stereometrycznych powierzchni elementów maszyn i urządzeń technologicznych jest przydatna do wnioskowania o stanie tej powierzchni, jak i do prognozowania właściwości eksploatacyjnych wyrobów. Stosowane powszechnie parametry geometryczne jak wysokość nierówności  $R_t$  czy średnie odchylenie od linii średniej profilu  $R_a$ , nie odzwierciedlają stopnia złożoności struktury geometrycznej powierzchni (SGP), ani też pozwalają wnioskować o jej cechach użytkowych. Dlatego też wprowadza się szereg dodatkowych parametrów [1] oraz metod pomiaru [2,3]. Jedną z możliwości określenia pewnych cech SGP jest wykorzystanie techniki komputerowej analizy obrazu [5,6,7] oraz wielkości jaką jest „wymiar fraktalny”[4,8].

Termin „fraktal” zaczerpnięty z języka łacińskiego, wywodzi się ze słowa fractus – „złamany,” „cząstkowy”. Oznacza to obiekt, którego części są podobne do całości (obiekt samopodobny). Matematycy określają fraktale, jako zbiór, który posiada nie trywialną strukturę w każdej skali. Zbiór ten jest samopodobny, co utrudnia opisanie go w języku tradycyjnej geometrii euklidesowej, jeśli nie w sensie dokładnym to w stochastycznym lub przybliżonym. Przykłady fraktali dwuwymiarowych przedstawiono na Rys.1.



Rys. 1. Przykłady fraktali dwuwymiarowych: a) Krzywe Kocha, b) krzywe Gospera [4]

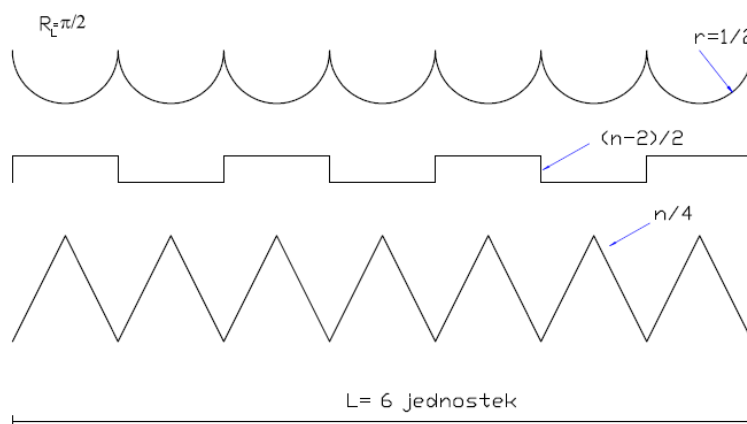
Najbardziej rozpowszechnionym opisem profilu lub powierzchni jest funkcja Weierstrassa – Mandelbrota wyrażająca się następującym wzorem:

$$z(x) = G^{D-1} \sum_{n=n_1}^{\infty} \frac{\cos(\gamma^n x + \phi_n)}{\gamma^{(2-D)n}} \quad (1)$$

przy czym:  $\phi_n$  - losowa faza,  $\gamma$  - współczynnik skali.

Niestety nie udało się rozszerzyć tej zależności do trzech wymiarów. Druga metoda polega na wykorzystaniu widmowej gęstości mocy, a trzecia bazuje na funkcji strukturalnej, polegając na sukcesywnym jej dodawaniu. Należy podkreślić, że struktura geometryczna powierzchni powinna być rozważana w układzie 3D.

Pojawia się pytanie, czy opis za pomocą fraktali można użyć do każdej powierzchni? W celu opisanego przełomów lub innych powierzchni swobodnych korzysta się z metod fraktalnych, które pozwalają w wielu przypadkach na rozróżnienie przełomów o różnej morfologii, ale muszą posiadać tę samą wartość parametru  $R_L$  (Rys. 2). Wynika to z faktu, iż procesy pęknięcia w skali mikroskopowej posiadają przypadkowy charakter, co jest szczególnie użyteczne do zastosowania analizy fraktalnej [5]. W literaturze są również wzmianki dotyczące zastosowania opisu fraktalnego powierzchni po elektrodrażeniu, szlifowaniu, a także po procesie eksploatacji w wyniku zużycia. W swej strukturze zawierają one parametry fraktalne, które mogą odzwierciedlać specyficzne cechy tych powierzchni.

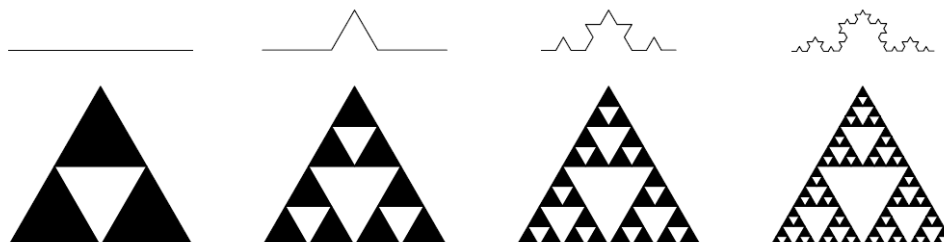


Rys. 2. Profile modelowe o jednakowych współczynnikach  $R_L$  [4]

Wg autorów [2, 5] fraktale można podzielić na dwie grupy:

- fraktale o charakterze niestochastycznym (nieprzypadkowe),
- fraktale o cechach stochastycznych (przypadkowe).

Fraktale niestochastyczne należą do obiektów matematycznych, powstałych na drodze kolejnych iteracji. Przykładem tego typu fraktali jest trójkąt Sierpińskiego (Rys. 3).



Rys 3. Sposób konstruowania fraktali niestochastycznych (trójkąt Sierpińskiego) [5]

W drugim przypadku, obiekty stochastyczne, które nie są fraktalami występują często w przyrodzie. Posiadają one pewne właściwości, (np. gęstość), które maleją liniowo w szerokim zakresie, wraz z powiększaniem się (przedstawiamy je na podwójnie logarytmicznym wykresie).

Cechą fraktali jest również samopodobieństwo. Jeśli spojrzeć się na część obiektu, który należy do fraktali, przypomina on jego całość. Oznacza to, że po uśrednieniu wielu powiększonych fragmentów, z tego samego obiektu będzie można zauważyć podobieństwo do całości. Przypadek występowania tego typu fraktali przypadkowych ma miejsce jedynie w określonych zakresach skali. Dlatego trudno jest w takich przypadkach podać ścisły algorytm ich tworzenia. W tym celu wykorzystuje się wymiar fraktalny. Podstawową techniką wyznaczenia wymiaru jest zbudowanie na wykresie podwójnie logarytmicznym zależności długości linii profilu od powiększenia (rozdzielczości), lub wielkości kroku pomiarowego. Przedstawia on równanie (2) linii prostej o ujemnym współczynniku kierunkowym  $c$ .

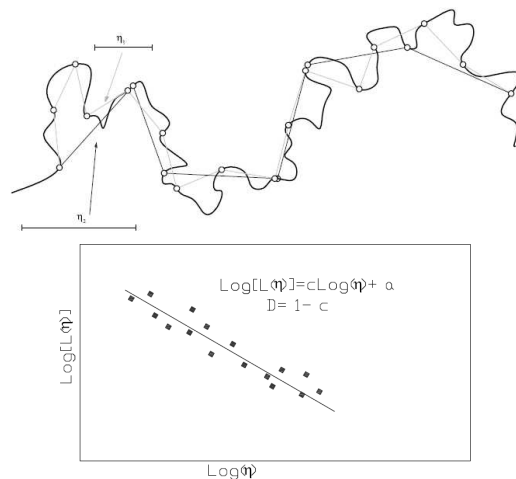
$$\log[L(x)] = c \log x + b \quad (2)$$

przy czym:  $L(x)$  – długość profilu zależna od wielkości kroku pomiarowego  $x$ ,  
 $c$  – współczynnik kierunkowy prostej związany z wymiarem fraktalnym  $D$ .

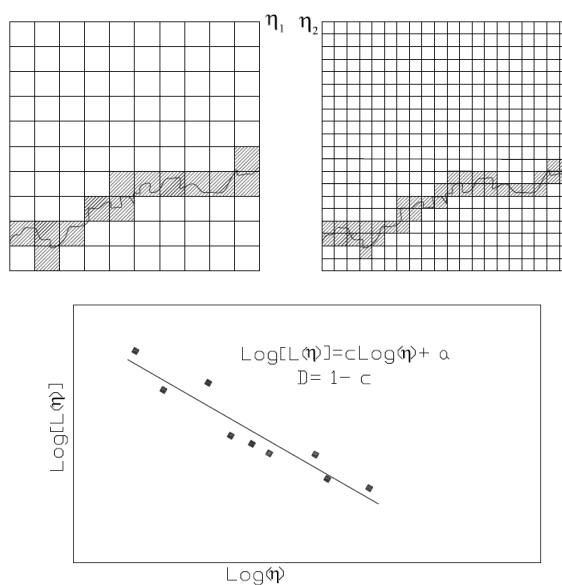
Wymiar fraktalny będący różnicą  $D = 1 - c$  przyjmuje wartości od 1 do 2

W pracach [5, 8] jest przedstawionych kilka metod wyznaczenia długości linii profilu. Jedną z nich jest metoda cięciw, Divider Method lub Commpass Method), w której profil jest zastępowany cięciwami o stałej długości. Punkty początkowe i końcowe powinny być identyczne dla różnych kroków pomiarowych (Rys. 4).

Inna metoda pomiaru długości linii – polega na nakładaniu siatek kwadratowych o różnych długościach boku (*Box- Counting Method*). W ten sposób zobrazona funkcja na wykresie przedstawia liczbę kwadratów (rozmiaru siatki kwadratowej) przeciętych przez profil przełomu (Rys. 5).



Rys. 4. Interpretacja krzywej za pomocą linii łamanej o różnych długościach kroku pomiarowego  $\eta$  i wyznaczanie wymiaru fraktalnego metodą cięciw [8]



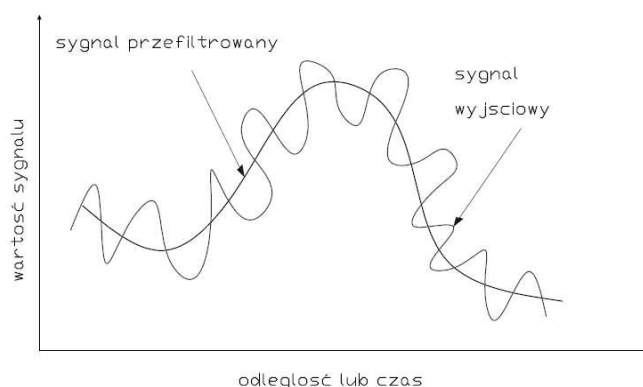
Rys. 5. Wyznaczenie wymiaru fraktalnego metodą Box – Counting [5]

## 2. Analiza i filtracja obrazu struktury geometrycznej powierzchni

Do wyznaczenia wymiaru fraktalnego struktury geometrycznej powierzchni (SGP) korzysta się z metod i technik analizy obrazu. Analiza obrazu jest to proces przetwarzania informacji, gdzie danymi wejściowymi jest obraz, zaś dane wyjściowe są zapisane w postaci liczb, tablicy liczb, decyzji, tekstu itp. Kolejnym krokiem jest przetwarzanie obrazu. Jest to proces przetwarzania informacji, w którym dane wejściowe jak i wyjściowe są w postaci obrazu. Do realizacji tych zadań korzysta się z systemów komputerowych, które

między innymi znajdują zastosowanie w takich dziedzinach, jak np. [5]: nauka o materiałach (ocena porowatości, wielkości ziaren), medycyna (analiza zdjęć z tomografu), kryminalistyka (porównanie linii papilarnych), teledetekcja (zdjęcia satelitarne i lotnicze), kontrola jakości, automatyczne sortowanie korespondencji i inne.

Eliminacja szumów i przypadkowych zakłóceń sygnału powstałych w badanym obrazie polega zazwyczaj na usunięciu wartości, które są zbyt duże lub zbyt małe za pomocą filtrów. Idea **procesu filtracji** jest przedstawiona na Rys. 6.



Rys.6. Zasada procesu filtracji [5]

W wyniku zastosowania filtru uzyskuje się pewne działania algebraiczne na liczbach, które opisują kolor lub stopień szarości w sąsiedztwie analizowanego punktu. Posługując się działaniami matematycznymi uzyskuje się różnego rodzaju filtry, tj.:

- **minimalny** – działa gdy szum jest jednorodny i znajduje się w jasnym zakresie stopnia szarości. Analizuje on otoczenie punktu (wraz z punktem) obrazu i przypisuje pikselowi wartość *minimum*, spośród wartości pikseli z nim sąsiadujących. Efektem działania tego filtru jest przyciemnienie obrazu;
- **maksymalny** – w przypadku obrazów z jednorodnym szumem. Analizuje on otoczenie punktu (wraz z punktem) obrazu i przypisuje pikselowi wartość *maksimum*, spośród wartości pikseli z nim sąsiadujących. Efektem działania tego filtru jest rozjaśnienie obrazu;
- **medianowy** – odrzuca wartości skrajne. Sprawdza się w przypadku niejednorodnego szumu o różnych stopniach szarości. Jego działanie polega na przypisaniu nowej wartości pikselowi analizowanemu punktowi, równej wartości znajdującej się w środku ciągu rankingowego. Dzięki tym cechom mediana nie wprowadza nowych wartości do obrazu i nie rozmywa przy tym krawędzi tego obrazu;
- **uśredniający** – uwzględnia średnie arytmetyczne lub ważone wartości analizowanego punktu oraz jego sąsiadów. Należy on do filtrów liniowych, które wprowadzają zmiany w obrazie. Zasada działania polega na sumowaniu wartości poszczególnych punktów, a następnie dzieleniu wyniku przez liczbę wszystkich wierszy i komórek.

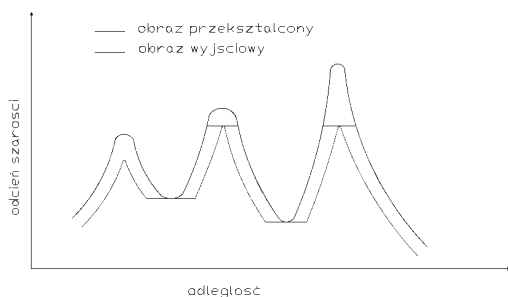
- **wyostrzający** – jeżeli jeden środkowy punkt będzie posiadał dwukrotnie jaśniejsze otoczenie, to po dokonaniu filtracji uzyska się 6- krotnie większą wartość. Pozostałe punkty będą miały takie same wartości pikseli jak przed filtracją, za wyjątkiem narożnych komórek, które zmienia się z (-1) na 0 (zero).

Tego typu filtr powoduje lokalne zwiększenie kontrastu dla, natomiast w analizie obrazu wprowadza szum utrudniający detekcje poszczególnych obiektów. Podstawową cechą do jakiej należy dążyć przy analizie obrazów jest uzyskanie możliwie najlepszych obrazów wyjściowych zamiast korygowania kiepskich oryginałów.

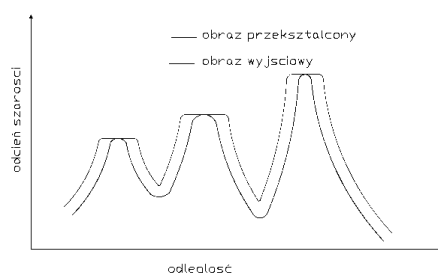
Drugą grupę przekształceń obrazów stanowią **przekształcenia morfologiczne**. Operacje morfologiczne są bardziej selektywne, nie przekształcają one wszystkich punktów jak czyniły to filtry. Idea działania przekształceń morfologicznych polega na ograniczeniu się tylko do punktów odpowiadających pewnemu wzorcowi, nazywanego elementem strukturalnym (jest to element otoczony przez jednolite tło).

Do uniwersalnych przekształceń morfologicznych należą [5, 6, 7]:

- **erozja** – powstały obraz jest otrzymany w wyniku „przetaczania” okręgu po stronie wewnętrznej brzegu figury X. Kolejne położenia okręgu wyznaczają nowy brzeg figury po zerodowaniu (Rys. 7). Przekształcenie to jest stosowane w celu uproszczenia struktury obiektu, usunięcia drobnych szczegółów, wygładzenia krawędzi, jak również podziału elementu na kilka mniejszych elementów składowych. Erozja jest transformatą addytywną (erozja złożona jest taka sama, jak kolejne transformacje proste).

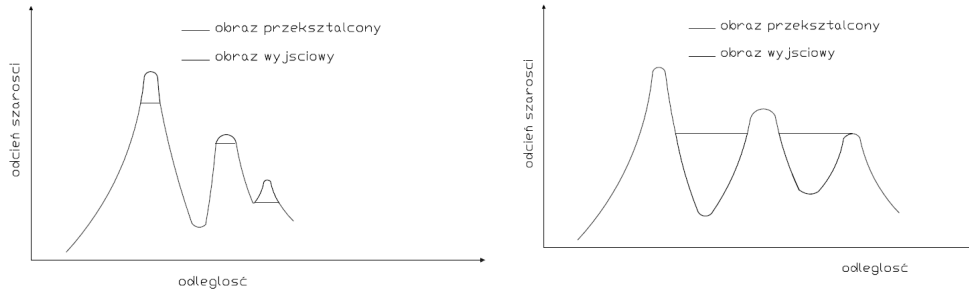


Rys.7. Schemat erozji obrazu wieloodcieniowego



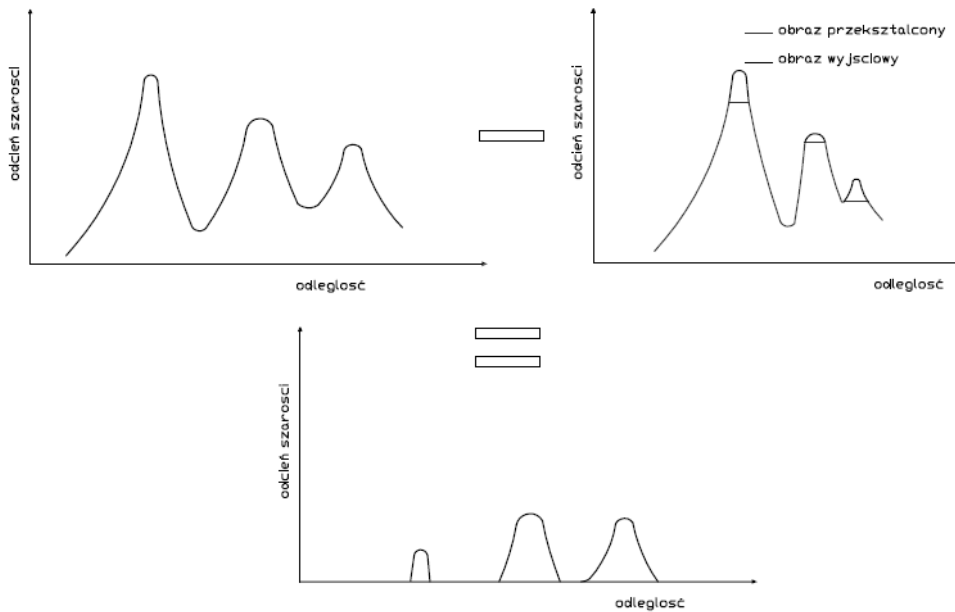
Rys.8. Schemat dylatacji obrazu wieloodcieniowego

- **dylatacja** – jest to przekształcenie odwrotne do erozji. Podobnie jak w erozji „przetacza” się element ale po zewnętrznej stronie brzegu figury. Przekształcenie to jest stosowane w celu wypełnienia wąskich i niewielkich szczelin (ubytków), otworów w obrazie, łączenia mniejszych elementów położonych blisko siebie w całość oraz wygładzenia krawędzi (Rys. 8).
- **otwarcie** – połączenie erozji z następującą po sobie dylatacją. Polega na przemieszczeniu okręgu lub (dowolnego szablonu) po stronie wewnętrznego brzegu figury i odrzuceniu tych punktów, które nie mogą być osiągnięte przez szablon (Rys. 9.). Przekształcenie to powoduje usunięcie drobnych wgłębień i wypukłości i rozłączenie obiektów z przewężeniami.

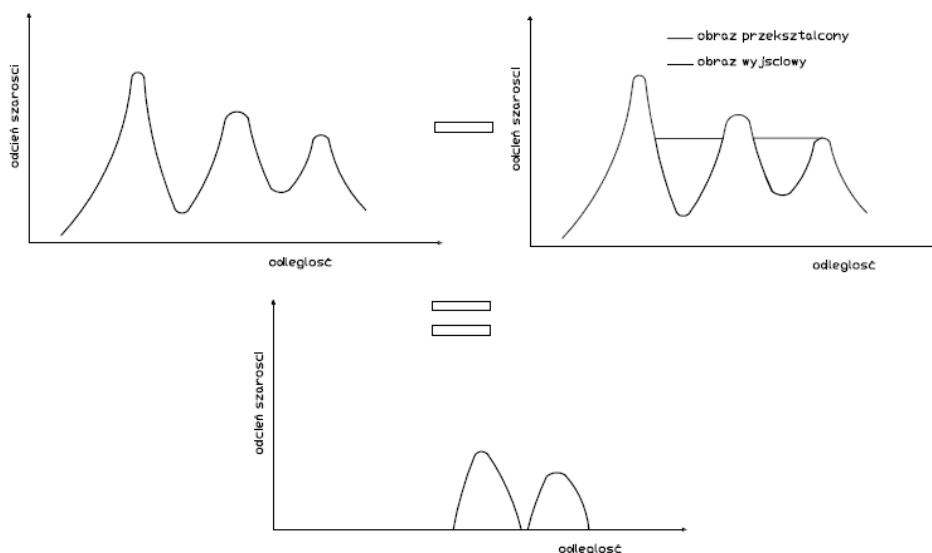


Rys.9. Otwarcie obrazu wieloodcieniowego Rys.10. Zamknięcie obrazu wieloodcieniowego

- **zamknięcie** – w wyniku przemieszczania koła lub (szablonu) po zewnętrznej stronie brzegu figury, dodawane są wszystkie te punkty, które nie mogą być osiągnięte przez koło (Rys. 10). Operacja ta ma zastosowanie przy wypełnianiu niewielkich szczelin i drobnych otworów wewnątrz obiektu.
- Otwarcie i zamknięcie nie wykazują addytywności oraz nie zmieniają kształtu i powierzchni o dużych rozmiarach i wyrównanym konturze.
- **detekcja szczytów** (najjaśniejsze miejsca) – polega na odjęciu od obrazu wyjściowego, obrazu powstałego po otwarciu (Rys. 11). Detekcją również nazywa się binaryzację z dolnym progiem, w celu pozostawienia najjaśniejszych punktów.
- **detekcja dolin** (czarny czubek kapelusza) – polega na odjęciu od obrazu wyjściowego, obrazu powstałego po zamknięciu (Rys. 12). Binarystacja z dolnym progiem, w celu pozostawienia najciemniejszych punktów.



Rys.11. Detekcja szczytów



Rys.12. Detekcja dolin

### 3. Obraz przestrzenny i analiza 3D

Oprogramowania do analizy obrazów w układzie przestrzennym 3D pozwalają na filtrowanie, binaryzację i typowe pomiary jak w analizie 2D. Dzięki analizie 3D można otrzymać precyzyjne informacje o rozmiarach, kształcie i położeniu przestrzennym w analizowanym obiekcie. Również w przypadku takiej analizy występuje problem ograniczonej rozdzielczości. Istnieją oprogramowania do rozpoznawania i analizy obrazów.

Aphelion jest zaawansowaną platformą, która służy do przetwarzania obrazu. Istnieją trzy wersje tego oprogramowania:

- Aphelion Developer - zawiera zaawansowane narzędzia, które służą do analizy obrazu i są wykorzystywane również do analizy 3D.
- Aphelion Lab pozwala na szybkie tworzenie skutecznych projektów analizy obrazów cyfrowych uzyskanych z mikroskopów i wielu innych urządzeń. Dzięki jego praktycznemu interfejsowi użytkownika, może on skupić się na wynikach, a nie na programowaniu lub zarządzaniu obrazami.
- Aphelion SDK to pakiet klasy tylko komercyjnej, pozwalający programiście na łatwe umieszczanie przetwarzanych obrazów w jego własnej aplikacji.

Aphelion jest oprogramowaniem do przetwarzania obrazu i ilościowej analizy służącym do szybkiego prototypowania aplikacji, rozwoju nowych technik obrazowania, szkolenia „widzenia” komputera i wdrażania aplikacji. Program ten, daje wiele możliwości, do których można zaliczyć między innymi: operacje arytmetyczne i logiczne, filtrację, operacje morfologiczne, transformatę Fouriera, klasyfikację obiektów na podstawie zasad logiki rozmytej, analizę obrazów kolorowych oraz obrazów 3D (Rys. 13).

Podstawą do analiz ilościowych są obiekty i ich atrybuty, czyli miary, co odróżnia Aphelion od większości oprogramowań służących analizie obrazu. Dzięki temu można nakładać obiekty na różne obrazy i dokonywać porównań, a także przesuwając, wygładzać, łączyć ze sobą obiekty z różnych zbiorów. Pomimo tego, że na siebie nachodzą, obiekty



pozostają rozłączne. Obrazy analizowane w Aphelionie mogą być binarne, szare, lub kolorowe, o dowolnej wielkości. Powinny być zapisane w jednym z następujących formatów: TIFF, BMP, JP, KBV.



Rys. 13. Menu programu Aphelion

#### 4. Wyznaczenie wymiaru fraktalnego metodą Box – Counting

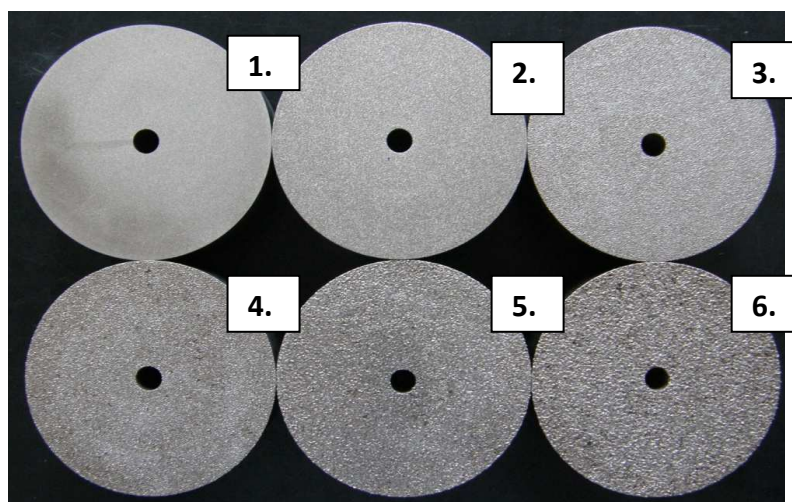
Do przeprowadzenia analizy SGP próbek po obróbce elektroerozyjnej – EDM (Rys. 14) został wykorzystany wymiar fraktalny, wyliczony za pomocą metody metody Box – Counting. Podstawową techniką wyznaczenia wymiaru, jest zbudowanie wykresu podwójnie logarytmicznego, zależności długości linii profilu od powiększenia (rozdzielczości) lub wielkości kroku pomiarowego. Analiza została przedstawiona w formie wykresów. Za podstawę wyznaczenie wymiaru fraktalnego przyjęto wielkość kroku pomiarowego równą  $2 \mu\text{m}$ .

Odpowiedni dobór procesu technologicznego obróbki wiąże się stawianymi wymaganiami strukturalnymi powierzchni, które powinny zostać utrzymane w celu zapewnienia właściwości i parametrów użytkowych w czasie eksploatacji [1]. Integralną częścią tego procesu jest odpowiedni dobór metody i urządzenia pomiarowego, który odgrywa ważną rolę przy analizowanej powierzchni. W pracy [41] zostały przedstawione zakresy stosowania różnych technik pomiarowych do topograficznej (3D) analizy powierzchni (Rys.15). Wynika z tego, że istnieje duża liczba technik pomiarowych, tak naprawdę żadna z poszczególnych metod pomiaru SGP mierząc to samo, uzyskuje zupełnie inne wyniki i nie może objąć całego zakresu pomiarowego. W związku z tym odpowiednia technika pomiarowa, powinna zostać dobrana w zależności od zastosowania funkcji powierzchni, biorąc pod uwagę parametry geometryczne i funkcjonalne. Wniosek z porównań tych jest następujący: właściwa analiza przestrzennej powierzchni, skutkuje

uzupełnianiem się metod pomiaru w oparciu o wykorzystanie hybryd (różnych, łącznych technik analizy).

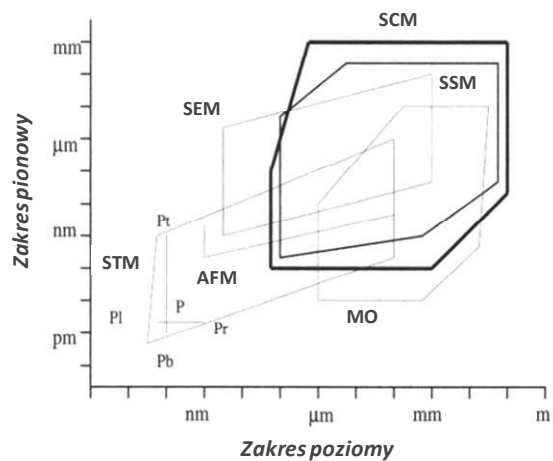
Tab. 1. Parametry procesu obróbki elektroerozyjnej badanych próbek ze stali NC 10

Nr. próbki	Iz [A]	Ir [A]	Czas impulsu Ti [μs]	Czas przerwy To [μs]	Napięcie zadane Uz [V]	Wsp. przewodności elektrycznej dielektryka	Prędkość odsuwu elektrody Fc [obr/min]
1	3	1	29	10	65	100	5
2	3	5	160	16	50	100	10
3	3	9	290	29	42	100	15
4	3	15	600	29	32	100	20
5	3	25	1600	40	30	100	30
6	3	40	25000	100	30	100	40

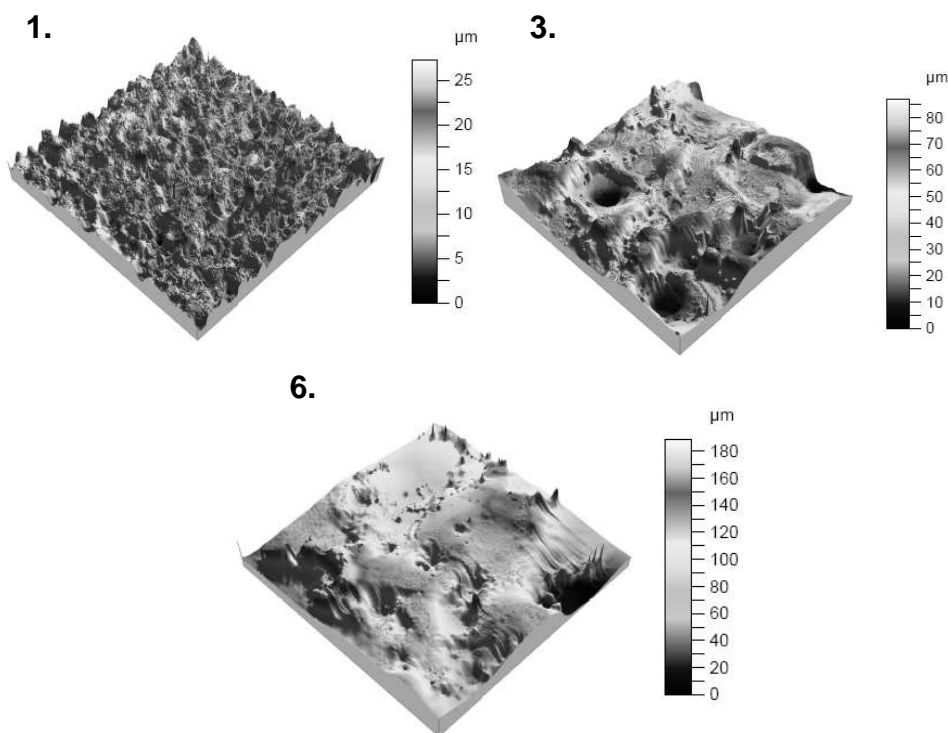


Rys. 14. Próbkę ze stali NC 10 po obróbce EDM

Badania struktury geometrycznej powierzchni (Rys.16) próbek wykonano na Politechnice Świętokrzyskiej przy użyciu profilometru Talyscan CCI 2000 firmy Taylor-Hobson z bezstykową głowicą skanującą, przy wykorzystaniu oprogramowania Taly Map Silver 5.0.3 5052 firmy Digital Surf.

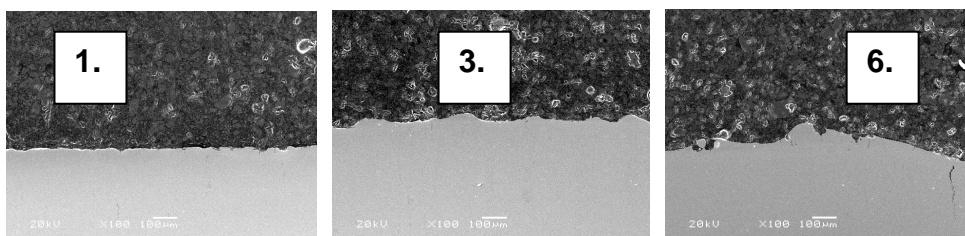


Rys. 15. Zakresy i rozdzielczość podstawowych technik pomiaru SGP [41]  
 STM – skaningowy mikroskop tunelowy, AFM- mikroskop sił atomowych, MO – mikroskop optyczny, SEM – skaningowy mikroskop elektronowy, SSM – przyrząd skaningowy z głowicą stykową (profilometr), SCM – skaningowy mikroskop współosiowy.



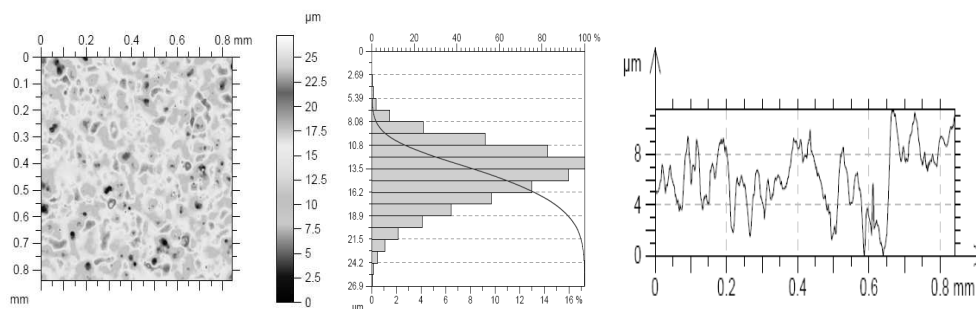
Rys. 16. Przykłady topografii powierzchni próbek nr 1, nr 3, nr 6

Następnie zostały wykonane zglądy metalograficzne próbek (Rys. 17) w celu przeprowadzenia analizy powierzchni na mikroskopie skaningowym.

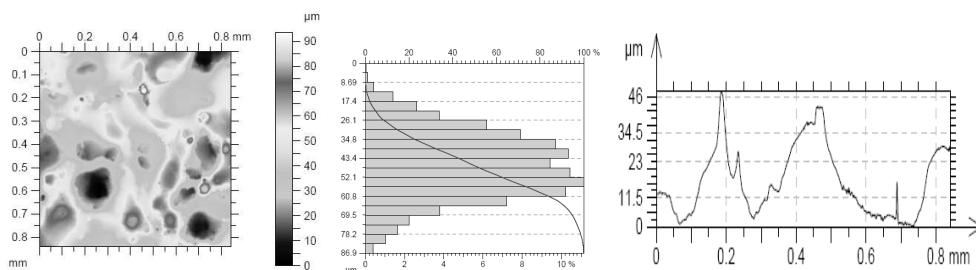


Rys. 17. Zglądy poprzeczne wybranych próbek nr 1, nr 3, nr 6

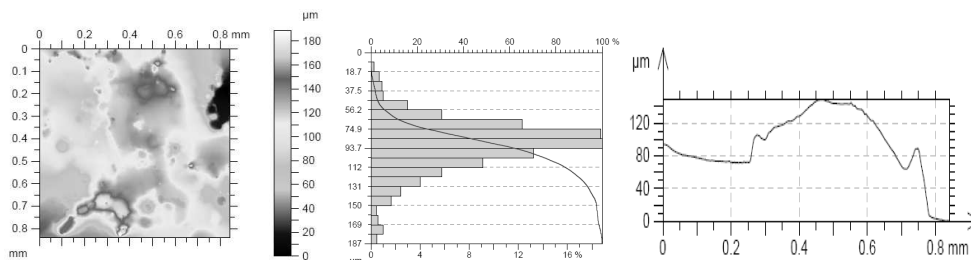
W wyniku przeprowadzonej analizy SGP zostały określone parametry wysokości nierówności oraz parametry amplitudowe:  $R_a$ ,  $S_q$ ,  $S_t$ ,  $S_p$ ,  $S_z$ ,  $S_v$ ,  $S_{sk}$ ,  $S_{ku}$  (zgodnie z zaleceniami w normach [9]). Przykłady graficznej ilustracji wyników pomiarów zostały przedstawione na Rys. 18 – Rys. 20.



Rys. 18. Zestawienie wybranych wyników pomiarów SGP – próbka nr 1

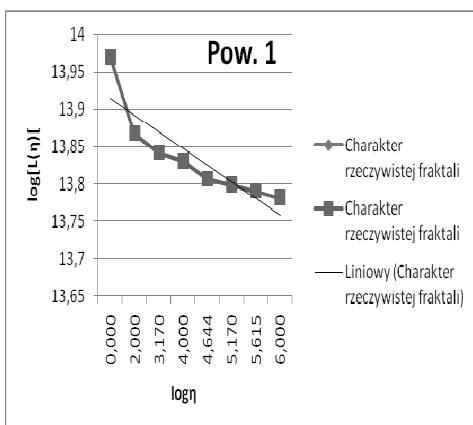


Rys.19. Zestawienie wybranych wyników pomiarów SGP – próbka nr 3

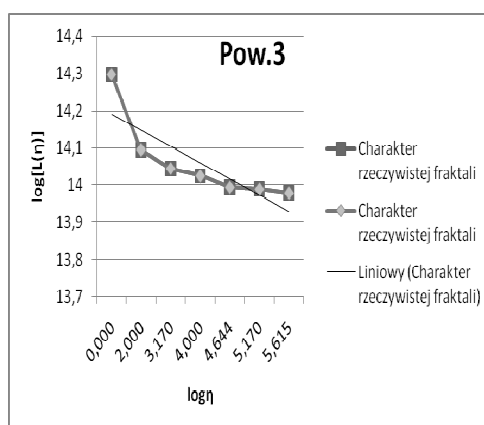


Rys.20. Zestawienie wybranych wyników pomiarów SGP – próbka nr 6

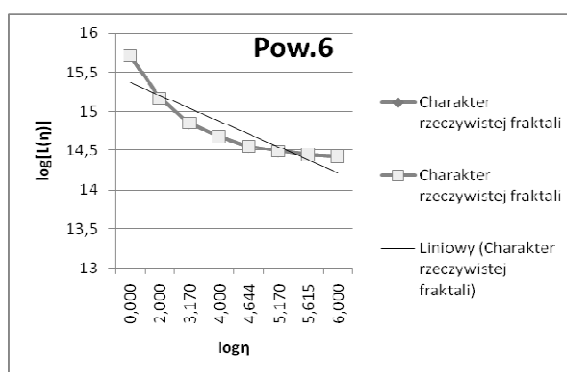
Analizy SGP posłużyły do wyznaczenia wymiaru fraktalnego za pomocą programu Aphelion, którego przykłady przedstawiono na Rys. 21 – Rys.24. Uzyskane wyniki w pełni potwierdzają możliwość zastosowania tego oprogramowania do analizy fraktalnej struktury geometrycznej powierzchni elementów kształtowanych w procesie obróbki.



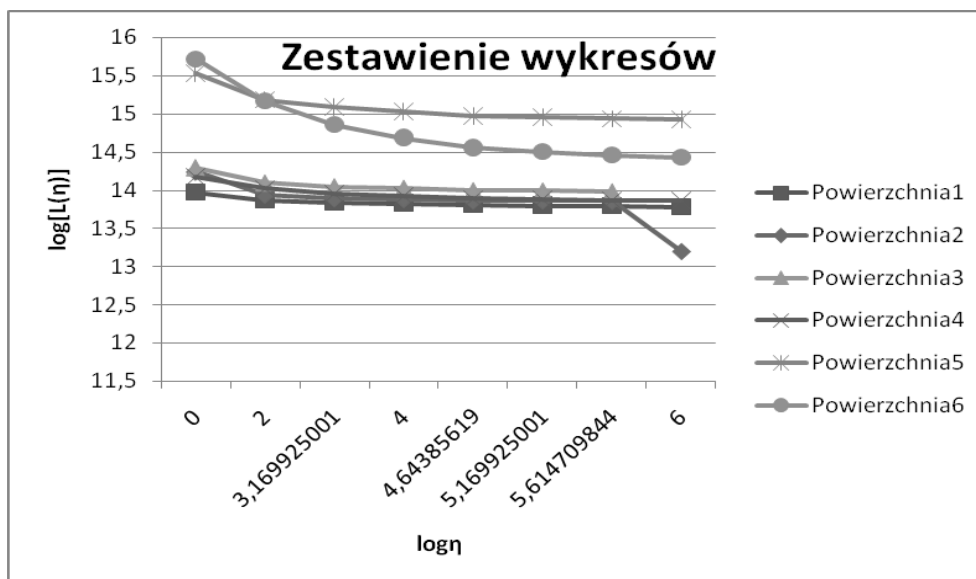
Rys. 21. Wymiar fraktalny na powierzchni 1



Rys. 22. Wymiar fraktalny na powierzchni 3



Rys. 23. Wymiar fraktalny na powierzchni 6



Rys. 24. Zestawienie wymiaru fraktalnego sześciu badanych powierzchni

## 5. Podsumowanie

Przeprowadzona analiza wskazuje, że przy zmieniających się parametrach obróbki elektroerozyjnej wymiar fraktalny zawiera się w przedziale  $0.60 \div 1.69$ . Może on służyć jako pewien wskaźnik charakteryzujący dziedziczość technologiczną obrabianej powierzchni przedmiotu, bowiem zmiana warunków obróbki powoduje zmianę wartości wymiaru fraktalnego, co uwidacznia się położeniem wykresu w przyjętym układzie odniesienia (Rys. 24). należy jednak zaznaczyć, że istotną rolę odgrywa tu także wybór długości kroku pomiarowego. W przeprowadzonych badaniach była to wartość  $2 \mu\text{m}$ . Dobór tej wartości jest zależny od ukształtowanej SGP, a także możliwości obliczeniowych sprzętu komputerowego. Zbyt duża wartość kroku pomiarowego działa jak „filtr wygładzający” i dlatego wykresy nakładają się na siebie.

Charakterystyka wymiaru fraktalnego (położenie wykresu, wartość liczbowa) może być także wskaźnikiem izotropowości struktury geometrycznej powierzchni, a w połączeniu ze strukturą w ujęciu 3D daje lepsze możliwości oceny cech użytkowych wyrobu.

Wydaje się więc celowe przeprowadzenie dalszych analiz i oceny ilościowej parametrów SGP, np. w połączeniu z krzywą nośności powierzchni. W przypadku izotropowej SGP ocena nośności nie budzi wątpliwości zgodnie z dotychczas stosowaną procedurą. Natomiast w odniesieniu do powierzchni o anizotropowej SGP szersza analiza, w połączeniu z oceną wymiaru fraktalnego, pozwoli na wyznaczenie pełniejszej charakterystyki nośności powierzchni roboczej elementów maszyn.

## Literatura

1. Wieczorowski M.: Wykorzystanie analizy topograficznej w pomiarach nierówności powierzchni. Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, Poznań, 2009.

2. Wojnar L., Kurzydłowski Krzysztof J., Szala J.: Praktyka analizy obrazu. Polskie Towarzystwo Stereologiczne, Kraków, 2002.
3. Wojnar L., Majorek M.: Komputerowa analiza obrazu. Wydawnictwo Fotobit – Design, Kraków, 1994
4. Wojnar L., Mikulski.: Komputerowa analiza obrazu. Wydawnictwo Fotobit – Design, Kraków, 1996.
5. Wojnar L.: Fraktografia ilościowa. Podstawy i komputerowe wspomaganie badań. Zeszyt Naukowy nr 2 Politechnika Krakowska, Kraków, 1990.
6. Schwenke H., Neuschäfer-Rube U., Pfeifer T., Kunzmann H.: Optical Methods for Dimensional Metrology in Production Engineering. Annals of the CIRP, Vol. 51, No. 2, pp. 685-699.
7. Sherrington I., Smith E.H.: Modern measurement techniques in surface metrology. Part II. Optical measurements, Wear, Vol. 125, pp. 289-308.
8. Oczóś K. E., Lubimov V.: Struktura geometryczna powierzchni. Oficyna Wydawnicza Politechniki Rzeszowskiej, Rzeszów, 2003.
9. Normy: PN – 87/M – 04251: Struktura geometryczna powierzchni. Chropowatość powierzchni. Wartości liczbowe parametrów, 1987. PN – 87/M – 04256: Struktura geometryczna powierzchni. Chropowatość powierzchni. Terminologia ogólna; 1987. Norma ISO 25178, EUR 15178N – chropowatości powierzchni.

Prof. dr hab. inż. Józef GAWLIK  
 Instytut Technologii Maszyn i Automatykacji Produkcji  
 e-mail: jgawlik@mech.pk.edu.pl

Mgr inż. Wojciech MAGDZIARCZYK  
 Prof. dr hab. inż. Leszek WOJNAR  
 Instytut Informatyki Stosowanej  
 Politechnika Krakowska  
 al. Jana Pawła II 37; 31-864 Kraków  
 www.mech.pk.edu.pl  
 e-mail: wojnar@fotobit.net