ZASTOSOWANIE TEORII BLOKOWEJ W KONSTRUKCJI EFEKTYWNYCH ALGORYTMÓW DLA PROBLEMU HARMONOGRAMOWANIA ZADAŃ TRANSPORTOWYCH W SYSTEMIE MAGAZYNOWYM

Jarosław PEMPERA

Streszczenie: Problem harmonogramowania w systemach magazynowych polega na znalezieniu kolejności wykonywania zadań transportowych wynikających z żądań klientów tak, aby minimalizowany był czas przebywania środków transportowych klientów w miejscach rozładunkowo-załadunkowych. Każde zadanie transportowe polega na przewiezieniu wózkiem widłowym palety z produktami z jednego miejsca do innego miejsca. W pracy przedstawiono szczegółowy opis problemu oraz sposoby jego modelowania uwzględniające ograniczenia wynikające z najczęściej stosowanych zasad poruszania się wózków oraz bezpieczeństwa. Opracowano szereg własności pozwalających na szybkie wyznaczenie harmonogramu.

Słowa kluczowe: modelowanie, system magazynowy, metoda blokowa.

1. Wstęp

Centra magazynowe są ogniwem łączącym producentów dóbr ze sprzedawcami hurtowymi (dużymi detalicznymi). Z tego punktu widzenia, w centrum magazynowym realizowane są dwie funkcje. Pierwsza polega na odbiorze dóbr od producentów. Produkty dostarczane są najczęściej w partiach składających się z wielu palet identycznych wyrobów środkami transportowymi producenta (i/lub kooperujących firm transportowych). Druga polega na załadowaniu palet z zamówionymi wyrobami na środki transportowe odbiorców. Zamówienia odbiorców cechują się dużą różnorodnością produktów i z reguły składają się z pojedynczych palet z wyrobami różnych producentów.

Palety składowane są na półkach. Układ półek oraz oznaczenia poziome i pionowe wyznaczają alejki komunikacyjne, którymi transportowane są palety na wózkach widłowych. Obsługa każdej palety generuje jedno zadanie transportowe, które składa się z czterech czynności: przejazdu od miejsca załadunku, załadunku palety, przejazdu do miejsca rozładunku oraz rozładunku palety. Oczywiście załadunek i rozładunek palety wiąże się z wykonaniem przez operatora szeregu manewrów. Ze względu na bezpieczeństwo oraz w trosce o płynne poruszanie się wózków, w centrum obowiązują określone zasady poruszania się. Zasady te w połączeniu z oznaczeniami alejek determinują kierunek jazdy każdego wózka oraz pierwszeństwo przejazdu w przypadku korzystania z tego samego odcinka alejki.

Harmonogramowanie pracy operatorów wózków widłowych obejmuje przydział zadań do operatorów, wyznaczenie kolejności ich wykonywania przez każdego z operatorów oraz wyznaczenie momentów rozpoczęcia (zakończenia) poszczególnych czynności każdego z zadań. Głównym celem harmonogramowania jest minimalizacja czasu oczekiwania dostawców/odbiorców. Cel ten pośrednio minimalizuje również czasy oczekiwań operatorów przed miejscami załadunku/rozładunku oraz łączny czas przejazdu operatorów. Cechy te są korzystne z punktu widzenia wydajności systemu magazynowego.

Obszerny przegląd problemów optymalizacyjnych generowanych przez systemy magazynowe można znaleźć w pracy [1]. Niestety rozważane są najprostsze modele tych systemów [2], [3] i [4] nieuwzględniające wielu istotnych z punktu widzenia płynności realizowania czynności transportowych i bezpieczeństwa ograniczeń.

2. Opis problemu

W systemie magazynowym znajduje się określona liczba miejsc przeładunkowych (doków). Przestrzeń magazynowa podzielona jest na sektory z regałami oraz poprzecinana jest alejkami transportowymi. Alejki podzielone są na dwa typy: stosunkowo wąskie – alejki robocze oraz szerokie – alejki komunikacyjne. Na alejkach roboczych obowiązuje jednokierunkowy kierunek jazdy, natomiast na alejkach transportowych dopuszczalny jest ruch dwukierunkowy, przy czym ruch w każdym z kierunków odbywa się po wydzielonym pasie.

Pomiędzy alejkami roboczymi i dokami operatorzy poruszają się po z góry ustalonych trasach, w alejkach transportowych wózki poruszają się maksymalną dopuszczalną prędkością. Wyprzedzanie nie jest dopuszczalne. Jedynie w alejkach roboczych dopuszczalne jest wykonywanie czynności załadunku i rozładunku palet na półki. Ze względów bezpieczeństwa, na manewry związane z tymi czynnościami rezerwowany jest określony obszar alejki roboczej. Przed alejkami roboczymi oraz dokami znajduje się dostatecznie dużo miejsca umożliwiającego parkowanie (kolejkowanie) wózków. Jeżeli miejsce wykonania czynności załadunku/rozładunku znajduje się w obszarze zarezerwowanym przez inny wózek lub wymaga przejazdu przez ten obszar to operator oczekuje w miejscu parkingowym aż do chwili zwolnienia tego obszaru. W danej chwili jeden wózek może realizować tylko jedno zadanie transportowe oraz tylko jeden wózek może być obsługiwany w doku.

Dla każdej czynności załadunku/rozładunku jednoznacznie określone jest miejsce oraz czas wykonania, przy czym w przypadku czynności wykonywanych w alejkach roboczych, do czasu wykonania wliczony jest czas przejazdu z miejsca parkingowego do miejsca rozładunku/załadunku, czas wykonania tej czynności oraz czas przejazdu do końca alejki roboczej. Dane są czasy przejazdu pomiędzy wszystkimi miejscami wjazdowymi do alejek roboczych i doków oraz pomiędzy wszystkimi miejscami wyjazdowymi z alejek roboczych i doków.

3. Opis matematyczny

System magazynowy składający się z w alejek roboczych ze zbioru $W=\{1,...,w\}$ oraz d doków przeładunkowych ze zbioru $D=\{1,...,d\}$ obsługiwany jest przez f wózków widłowych ze zbioru $F=\{1,...,f\}$. W systemie tym należy wykonać n zadań transportowych ze zboru $J=\{1,...,n\}$. Dla każdego zadania $j\in J$ określony jest termin dostępności r_j.

Każde zadanie składa się z czterech czynności, przy czym na potrzeby opisu ograniczymy się do dwóch tj. załadunku oraz rozładunku palety. Każda z tych czynności poprzedzona jest przejazdem wózka widłowego odpowiednio do miejsca załadunku oraz miejsca rozładunku.

Niech $T=[t_{ik}]_{(d+w)\times(d+w)}$ będzie macierzą czasów przejazdu pomiędzy wszystkimi miejscami wjazdowymi i wyjazdowymi alejek roboczych i/lub doków, przy czym indeksy $1,...,d$ przyporządkowane są dokom, natomiast $d+1,...,d+w$ alejkom roboczym, np. t_{ik} oznacza czas przejazdu pomiędzy wyjazdem z doku i oraz wjazdem do alejki roboczej k dla $1\leq i\leq d$, $d+1\leq k\leq d+w$.

Zbiór zadań, generuje $2n$ czynności ze zbioru $O=\{1,...,o\}$, gdzie $o=2n$. Zadaniu $j\in J$ przyporządkowane są czynności o numerach $2j-1$ (załadunek) oraz $2j$ (rozładunek). Dla każdej czynności i określony jest czas wykonania p_i, miejsce wjazdowe m_i oraz dodatkowo segment σ_i alejki, który rezerwowany jest w celu przeprowadzenia manewrów. W przypadku doków przeładunkowych wartości σ_i równe są zero. Segmenty numerowane są kolejnymi liczbami naturalnymi zgodnie z kierunkiem poruszania się wózków.

Niech $\gamma_k=(\gamma_k(1),...,\gamma_k(\eta(\gamma_k)))$, gdzie $\eta(\gamma_k)$ oznacza liczbę elementów permutacji γ_k, będzie permutacją określającą kolejność wykonywania zadań transportowych przez wózek $k\in F$. Kolejność wykonywania zadań transportowych przez wszystkie wózki w systemie możemy opisać przy pomocy zestawu permutacji $\gamma=(\gamma_1,...,\gamma_f)$. Przy czym zbiory zadań wykonywanych przez wózki muszą być wzajemnie rozłączne, a ich suma wyczerpywać zbiór J. Dalej, niech $\pi_k=(\pi_k(1),...,\pi_k(\eta(\pi_k)))$, będzie permutacją określającą kolejność wykonywania czynności transportowych przez wózek $k\in F$ wynikającą z permutacji γ_k. Oczywiście w permutacji tej bezpośrednio za każdą czynnością załadunkową musi następować odpowiadająca jej czynność rozładunkowa tj. $\pi_k=(2\gamma_k(1)-1,2\gamma_k(1),..., 2\gamma_k(\eta(\gamma_k))-1,2\gamma_k(\eta(\gamma_k)))$. Zestaw permutacji $\pi=(\pi_1,...,\pi_f)$ opisuje kolejność wykonywania czynności transportowych przez wszystkie wózki w systemie. Oczywiście, zbiory czynności wykonywane przez wózki są wzajemnie rozłączne, a ich suma wyczerpuje O.

Niech $\alpha=(\alpha_1,...,\alpha_{d+w})$, gdzie $\alpha_k=(\alpha_k(1),...,\alpha_k(\eta(\alpha_k)))$, będzie zestawem permutacji określających kolejność wykonywania czynności w miejscach załadunku i/lub rozładunku. Permutacje $(\alpha_1,...,\alpha_d)$ określają kolejność wykonywania czynności w dokach, natomiast $(\alpha_{d+1},...,\alpha_{d+w})$ w alejkach roboczych. Kolejność α_k jest permutacją elementów zbioru $\{s:m_s=k, s\in O\}$.

Niech S_i (C_i) będzie najwcześniejszym momentem rozpoczęcia (zakończenia) wykonywania czynności i, $i\in O$. Kolejność wykonywania czynności transportowych w systemie magazynowym określona przez parę (π,α) jest dopuszczalna, jeżeli istnieje dopuszczalny harmonogram wykonywania czynności transportowych określony przez momenty rozpoczęcia i zakończenia spełniający następujące warunki:

$$S_j\geq r_j,\quad j\in O, \tag{1}$$

$$S_{\pi_l(j)}\geq C_{\pi_l(j-1)}+T_{m_{\pi_l(j-1)},m_{\pi_l(j)}},\quad j=2,...,\eta(\pi_l),\quad l=1,...,f, \tag{2}$$

$$S_{\alpha_l(j)}\geq C_{\alpha_l(j-1)},\quad j=2,...,\eta(\alpha_l),\quad l=1,...,d, \tag{3}$$

$$S_{\alpha_l(j)}\geq C_{\alpha_l(j-1)},\quad \sigma_{\alpha_l(j)}\geq \sigma_{\alpha_l(j-1)},\quad j=2,...,\eta(\alpha_l),\quad l=d+1,...,d+w, \tag{4}$$

$$S_{\alpha_l(j)}\geq S_{\alpha_l(j-1)},\quad \sigma_{\alpha_l(j)}< \sigma_{\alpha_l(j-1)},\quad j=2,...,\eta(\alpha_l),\quad l=d+1,...,d+w, \tag{5}$$

$$C_j=S_j+p_j,\quad j\in O. \tag{6}$$

Z ograniczenia (1) wynika, że rozpoczęcie wykonywania czynności nie może rozpocząć się przed jej terminem dostępności. Ograniczenie (2) oznacza, że dla danego wózka, najwcześniejszy moment rozpoczęcia wykonywania czynności załadunku/rozładunku nie może być wcześniejszy od momentu zakończenia wykonywania poprzedniej czynności powiększonego o czas przejazdu pomiędzy miejscami wykonywania tych czynności. Ograniczenia (3–5) modelują ograniczenia wynikające z dostępu do miejsc załadunku i rozładunku palet. Ograniczenia (3) oznacza, że najwcześniejszy moment rozpoczęcia wykonywania czynności załadunku lub rozładunku w doku może nastąpić nie wcześniej niż po zakończeniu realizacji poprzedniej czynności wykonywanej w danym doku.

W alejkach roboczych najwcześniejszy moment rozpoczęcia wykonywania czynności w obszarach zarezerwowanych lub wymagających przez nie przejazdu może nastąpić dopiero po zakończeniu wykonywania czynności poprzedniej tj. czynności, dla której został zarezerwowany ten obszar (4), natomiast w przypadku czynności realizowanych we wcześniejszych segmentach (o niższym numerze) moment ten może rozpocząć się niezwłocznie po rozpoczęciu wykonywania tej czynności (5). Ostatnia równość (6) wiąże termin rozpoczęcia wykonywania czynności z momentem zakończenia wykonywania czynności.

Celem optymalizacji jest wyznaczenie przydziału zadań do wózków oraz harmonogramu ich wykonania spełniającego wszystkie w/w wymagania minimalizującego czas oczekiwania klientów centrum magazynowego. Precyzyjniej, chcemy znaleźć dopuszczalny harmonogram minimalizujący następującą funkcję kryterialną:

$$F_{\max}(\pi,\alpha)=\max_{i\in O}(C_i-r_i), \tag{7}$$

gdzie wartości C_i zostały wyznaczone dla pary (π,α).

4. Model grafowy i właściwości problemu

Przed przystąpieniem do omówienia modelu grafowego dokonamy uproszczeń układu nierówności (1–6). Niech:

$$s_{l,i,j}=-p_i \text{ dla } m_i=m_j=l,\ \sigma_j<\sigma_i,\ i,j\in O,\ l=d+1,\dots,d+w, \tag{8}$$
$$s_{l,i,j}=0, \text{ dla pozostałych } l,i,j.$$

Układ nierówności (1) –(6) możemy sprowadzić do postaci:

$$S_j\geq r_j,\quad j\in O, \tag{9}$$

$$S_{\pi_l(j)}\geq S_{\pi_l(j-1)}+p_{\pi_l(j-1)}+T_{m_{\pi_l(j-1)},m_{\pi_l(j)}},\quad j=2,\dots,\eta(\pi_l),\quad l=1,\dots,f, \tag{10}$$

$$S_{\alpha_l(j)}\geq S_{\alpha_l(j-1)}+p_{\alpha_l(j-1)}+s_{l,\alpha_l(j-1),\alpha_l(j)},\quad j=2,\dots,\eta(\alpha_l),\ l=d+1,\dots,d+w, \tag{11}$$

$$S_{\alpha_l(j)}\geq C_{\alpha_l(j-1)},\quad \sigma_{\alpha_l(j)}\geq\sigma_{\alpha_l(j-1)},\ j=2,\dots,\eta(\alpha_l),\ l=d+1,\dots,d+w, \tag{12}$$

Dalej, niech $R=\max_{i\in O} r_i$, oraz $q_i=R-r_i$, wówczas:

$$F_{\max}(\pi,\alpha)=\max_{i\in O}(C_i-r_i)=\max_{i\in O}(C_i-(R-q_i))=\max_{i\in O}(C_i+q_i)-R. \qquad (13)$$

Dla pary (π,α), skierowany graf $G(\pi,\alpha)$ definiujemy następująco: $G(\pi,\alpha)=(V,E(\pi,\alpha))$, gdzie V jest zbiorem węzłów, natomiast $E(\pi,\alpha)$ zbiorem łuków. Zbiór węzłów $V=o\cup 1,...,2n\cup *$ składa się z węzłów reprezentujących czynności $1,...,2n$ oraz dwóch fikcyjnych węzłów o oraz *. Węzły reprezentujące czynności obciążone są wagą równą p_i (czasowi trwania czynności), natomiast węzły fikcyjne wagą równą 0.

Zbiór łuków $E=E^o\cup E(\pi)\cup E(\alpha)\cup E^*$ podzielony jest na cztery podzbiory. Pierwszy podzbiór E^o modeluje ograniczenia (1) i zdefiniowany jest następująco:

$$E^o=\bigcup_{j\in O}\{(o,j)\}. \qquad (14)$$

Łuk $(o,j)\in E^o$ obciążony jest wagą r_j. Bezpośrednio z nierówności (2) wywodzą się łuki zbioru:

$$E(\pi)=\bigcup_{k\in F}\bigcup_{j=1}^{\eta(\pi_k)-1}\{(\pi_k(j),\pi_k(j+1))\} \qquad (15)$$

modelujące ograniczenia związane z kolejnością wykonywania czynności przez operatorów wózków. Łuk $e=(\pi_k(j),\pi_k(j+1))\in E(\pi)$ obciążony jest wagą równą $T_{m_{\pi_k(j)},m_{\pi_k(j+1)}}$, tj. czasowi przejazdu pomiędzy miejscami realizacji tych czynności.

Kolejnym podzbiorem łuków są łuki reprezentujące ograniczenia związane z kolejnością wykonywania czynności transportowych w miejscach załadunku/rozładunku, patrz nierówność (2).

$$E(\alpha)=\bigcup_{k=1}^{d+w}\bigcup_{j=1}^{\eta(\alpha_k)-1}\{(\alpha_k(j),\alpha_k(j+1))\}. \qquad (16)$$

Łuk $e=(i,j)\in E(\alpha)$ obciążony jest wagą równą $s_{i,}$ tj. 0 w przypadku dostępu do doków oraz zablokowanych segmentów alejek roboczych oraz $-p_i$ w przypadku bezkolizyjnego dostępu do segmentów w alejkach roboczych. Ostatnim zbiorem łuków jest zbiór:

$$E^*=\bigcup_{j\in O}\{(j,*)\}. \qquad (17)$$

Łuk $(j,*)\in E^*$ obciążony jest wagą q_j. Z definicji q_j jest wartością nieujemną. Korzystając z ogólnie znanych własności grafów można udowodnić następujące własności:

Własność 1. Jeżeli w grafie $G(\pi,\alpha)$ istnieje cykl, wówczas dla pary (π,α) nie istnieje dopuszczalny harmonogram wykonywania czynności.

Własność 2. Niech $G(\pi,\alpha)$ będzie grafem acyklicznym, wówczas dla pary (π,α) istnieje dopuszczalny harmonogram wykonywania czynności, przy czym najwcześniejszy moment zakończenia realizacji czynności $i\in O$ jest równy długości najdłuższej drogi dochodzącej do węzła i (z obciążeniem tego węzła) w grafie $G(\pi,\alpha)$.

Własność 3. Długości najdłuższych dróg dochodzących do wszystkich węzłów oraz sprawdzenie dopuszczalności pary (π,α) można wyznaczyć w czasie $O(n)$.

Własność 4. Długość najdłuższej drogi z węzła o do węzła * jest równa: $F_{\max}(\pi,\alpha)+R$.

5. Metoda blokowa

Własności blokowe są własnościami wynikającymi z reprezentacji grafowej wielu problemów szeregowania zadań z kryteriami $C_{\max}$, $L_{\max}$ oraz $f_{\max}$. Podstawy metody blokowej opracowane zostały w latach 80-tych [5,6]. Początkowo opracowano algorytmy oparte na tej metodzie dla problemów jednomaszynowych z kryterium $L_{\max}$ [7], następnie rozszerzono na bardziej ogólne problemy szeregowania zadań takie jak problem przepływowy i gniazdowy z kryteriami $L_{\max}$ i $f_{\max}$ [8–11].

Obecnie własności bloków wykorzystywane są do zwiększenia efektywności algorytmów heurystycznych opartych na metodach przeszukiwań lokalnych. Spektakularny sukces algorytmów wykorzystujących własności blokowe do eliminacji nieefektywnych obszarów przestrzeni rozwiązań oraz ukierunkowania poszukiwań [12,13] udowodnił, że możliwe jest skonstruowanie algorytmów opartych na metodach lokalnych przeszukiwań dostarczających dobrych rozwiązań. Dodatkowo wykorzystanie specyficznych własności rozwiązywanego problemu może znacznie przyspieszyć proces przeszukiwań.

Podstawowym pojęciem w metodzie blokowej jest pojęcie bloku. Blokiem operacji (krótko blokiem) w metodzie blokowej nazywany fragment najdłuższej drogi (drogi krytycznej) w grafie składający się z maksymalnej liczby węzłów reprezentujących operacje wykonywane na tej samej maszynie. Węzły reprezentujące operacje wykonywane na danej maszynie połączone są łukami wynikającymi z kolejności wykonywania zadań na tej maszynie. Łuki obciążone są wagą równą zero.

Twierdzenie blokowe sformułujemy dla ogólnego problemu szeregowania zadań z kryterium $C_{\max}$, który może być zamodelowany w opisany wyżej sposób.

Twierdzenie 1. Niech π będzie dopuszczalnym zbiorem permutacji określających kolejność wykonywania zadań na maszynach. Jeżeli istnieje dopuszczalny zbiór permutacji γ taki, że $C_{\max}(\gamma) < C_{\max}(\pi)$, wtedy w γ przynajmniej jedno zadanie dla przynajmniej jednego bloku z π poprzedza pierwsze zadanie lub występuje za ostatnim zadaniem tego bloku lub wykonywane jest na innej maszynie.

Łatwo można zauważyć, że w rozważanym problemie wózki widłowe oraz miejsca wykonywania czynności załadunku/rozładunku wymagają szeregowania zadań. Niestety, w tym przypadku, warunki konieczne twierdzenia blokowego nie są spełnione tj. węzły odpowiadające czynnościom wykonywanym na tych samych zasobach wymagających szeregowania połączone są łukami obciążonymi wagą w ogólnym przypadku różną od zera.

Niech jedna, dowolnie wybrana ścieżka krytyczna w grafie $G(\pi,\alpha)$ będzie jednoznacznie opisana przy pomocy ciągu węzłów $u=(o,u_1,...,u_{\eta(u)},*)$, gdzie $\eta(u)$ oznacza liczbę węzłów reprezentujących czynności w ścieżce krytycznej (bez węzłów fikcyjnych).

Ścieżka krytyczna może być podzielona na dwa typy podciągów węzłów. Pierwszy typ podciągów określony jest przez maksymalną sekwencję węzłów $(u_s,...,u_t)$ taką, że $m_{us}= m_{us+1}=...=m_{ut}$, oraz $(u_i,u_{i+1})\in E(\alpha)$ dla wszystkich $i=s,...,t-1$. Każdy taki ciąg określa blok czynności $B_{st}=(u_s,...,u_t)$ w miejscu załadunku/rozładunku m_s. Drugi typ podciągów określony jest przez maksymalną sekwencję węzłów (zawierającą maksymalna ich liczbę) $(u_s,...,u_t)$ taką, że $(u_i,u_{i+1})\in E(\pi)$ dla wszystkich $i=s,...,t-1$. Każdy taki ciąg określa W–sekwencję czynności transportowych $W_{st}=(u_s,...,u_t)$ realizowaną przez wózek widłowy. Dla rozważanego problemu twierdzenie blokowe można sformułować w następujący sposób:

Twierdzenie 2. Niech (π,α) będzie dopuszczalnym zbiorem permutacji określających kolejność wykonywania czynności transportowych w systemie magazynowym. Jeżeli istnieje dopuszczalna para (π',α') kolejności taka, że $F_{\max}(\pi',\alpha')<F_{\max}(\pi,\alpha)$, wtedy w α' przynajmniej jedna czynność i dla przynajmniej jednego bloku $B_{st}=(u_s,...,u_t)$ z α

1. poprzedza pierwszą czynność u_s tego bloku lub
2. występuje za ostatnią czynnością u_t tego bloku lub
3. wykonywane jest za czynnością j, $j\neq i$, $j \in u_s,...,u_t$ taką, że $\sigma_i<\sigma_j$.

lub w π' przynajmniej jedna para czynności $(i,i+1)$ reprezentujących odpowiednio czynność załadunku i rozładunku tego samego zadania, której co najmniej jedna czynność należy do przynajmniej jednej sekwencji $W_{st}=(u_s,...,u_t)$ w π

4. poprzedza parę czynności zawierającą pierwszą czynność u_s tej W–sekwencji lub
5. występuje za parą czynności zawierającą ostatnią czynność u_t tej W–sekwencji lub
6. jest realizowana przez inny wózek lub
7. wykonywana jest za czynnością rozładunku j, $j\neq i,i+1$, $j\in \{u_s,...,u_t\}$ taką, że $T_{B\pi(i),i}+T_{i+1,A\pi(i+1)}+T_{j+1,A\pi(j+1)}>T_{B\pi(i),A\pi(i+1)}+T_{j+1,i}+T_{i+1,A\pi(j)}$,

gdzie $B\pi(i)$ oraz $A\pi(i)$ oznaczają odpowiednio czynność bezpośrednio poprzedzającą czynność i oraz bezpośrednio następującą po tej czynności permutacji w π_k, gdzie k jest wózkiem realizującym zadanie, do którego należy czynność i.

Na podstawie Twierdzenia 1 (Twierdzenia blokowego) można wskazać modyfikacje rozwiązania powodujące powstanie rozwiązań nie lepszych od bieżącego bez czasochłonnego wyznaczania wartości funkcji celu dla tych rozwiązań. Co więcej wskazuje ono modyfikacje rozwiązania generujące rozwiązania potencjalnie lepsze od bieżącego. Pierwszą z tych cech nazywamy właściwościami eliminacyjnymi bloków (Twierdzenia blokowego). Własności te są tym mocniejsze im więcej wskazują rozwiązań nie lepszych od bieżącego. Z tego punktu widzenia, warunki 3 oraz 7 Twierdzenia 2 zmniejszają moc tych własności.

6. Zastosowanie własności eliminacyjnych w konstrukcji algorytmów opartych na metodach przeszukiwań lokalnych

Metody popraw są jednymi z najczęściej wybieranych narzędzi do konstrukcji algorytmów rozwiązujących problemy harmonogramowania zadań. Spowodowane jest to takimi cechami jak: generowanie dobrej jakości rozwiązań końcowych, możliwość kompromisu pomiędzy czasem obliczeń (liczbą przeglądniętych rozwiązań) oraz jakością generowanego rozwiązania końcowego, łatwe zrównoleglenie w systemach wieloprocesorowych, stosunkowo prosta implementacja, bardzo szybkie działanie na komputerach klasy PC.

W każdej iteracji algorytmy tego typu przeglądają lub próbkują zbiór rozwiązań sąsiednich bieżącego rozwiązania celem znalezienia najlepszego. Sposób definiowania tego zbioru ma decydujący wpływ na efektywność algorytmu. Każde rozwiązanie z sąsiedztwa generowane jest przez jednoznaczne przekształcenie rozwiązania bazowego w inne dopuszczalne rozwiązanie. Przekształcenie to nazywamy ruchem, który definiuje się tak, aby spowodować możliwie małą modyfikację rozwiązania bazowego.

W problemach szeregowania zadań najczęściej stosuje się ruchy typu (*a*) wstaw (ang. insert) oraz (*b*) wymień (ang. interchange). Z wielu udokumentowanych badań wynika, że ruchy typu wstaw są skuteczniejsze od ruchów typu zamień dla zdecydowanej większości problemów szeregowania zadań z kryteriami $C_{\max}$, $L_{\max}$ i $F_{\max}$. W przypadku gdy rozwiązanie γ reprezentowane jest w postaci *n*-elementowej permutacji ruch typu wstaw $v=(x,y)$ polega na usunięciu elementu $\gamma(x)$ z pozycji x w γ i wstawieniu na pozycję y w γ, $x\neq y$. Zatem otrzymujemy:

$$\gamma_v=(\gamma(1),...,\gamma(x\text{-}1),\gamma(x+1),...,\gamma(y),\gamma(x),\gamma(y+1),...,\gamma(n)), \tag{18}$$

dla $1\leq x<y\leq n$ (przesunięcie w prawo) lub

$$\gamma_v=(\gamma(1),...,\gamma(y\text{-}1),\gamma(x),\gamma(y),...,\gamma(x\text{-}1),\gamma(x+1),...,\gamma(n)), \tag{19}$$

dla $1\leq y<x\leq n$ (przesunięcie w lewo). Zbiór wszystkich ruchów typu wstaw składa się $(n-1)^2$ ruchów generujących różne permutacje.

W rozpatrywanym zagadnieniu rozwiązanie reprezentowane jest przez zbiór permutacji, przy czym każda z dwóch czynności zadania transportowego obecna jest w dwóch permutacjach tj. permutacji określającej kolejność wykonywania czynności pewnego wózka oraz w permutacji określającej kolejność dostępu do miejsca załadunku/rozładunku. Ruch typu wstaw możemy opisać przy pomocy piątki $v=(j,k,x,y,z)$, który polega na usunięciu czynności $2j-1$ i $2j$ z ich oryginalnych pozycji w π i α oraz wstawieniu czynności $2j-1$ na pozycję $2x-1$ w π_k i na pozycję y w $\alpha_{m_{2j\text{-}1}}$ oraz czynności $2j$ na pozycję $2x$ w π_k i na pozycję z w $\alpha_{m_{2j}}$, gdzie $k=1,...,f$, $x=1,...,\eta(\pi_k)/2$, $y=1,...,\eta(\alpha_{m_{2j-1}})$, $z=1,...,\eta(\alpha_{m_{2j}})$. Dla ustalonego j moc zbioru ruchów (rozwiązań sąsiednich) jest rzędu $O((n+f)\eta(\alpha_{m_{2j-1}})\eta(\alpha_{m_{2j}}))$.

W dotychczas rozważanych problemach harmonogramowania, dla których opracowano algorytmy wykorzystujące własności blokowe wskazanie całego lub dostatecznie dużego podzbioru dopuszczalnych rozwiązań potencjalnie lepszych od rozwiązania bieżącego było trywialne. W rozpatrywanym problemie, pomimo, że kolejności spełniających warunki Twierdzenia 2 jest bardzo dużo, wyznaczenie podzbioru rozwiązań dopuszczalnych jest bardzo trudne. W pracy proponujemy nowe podejście w wykorzystaniu metody blokowej. Polega ono na zastosowaniu własności eliminacyjnych Twierdzenia blokowego do eliminacji podzbiorów rozwiązań nie na podstawie rozwiązania bazowego lecz na podstawie rozpatrywanego w danej chwili dopuszczalnego rozwiązania sąsiedniego.

Niech (π_v,α_v), gdzie $v=(j,k,x,y,z)$, gdzie $x=1$, $y=1$, $z=1$ będzie rozwiązaniem powstałym z dopuszczalnego rozwiązania (π,α) przez przesunięcie czynności pewnego zadania j na pozycję pierwszą (i drugą) w permutacji określającej kolejność wykonywania czynności przez pewien wózek k oraz na pierwsze pozycje w miejscu załadunku i rozładunku. Łatwo można zauważyć, że rozwiązanie (π_v,α_v) jest dopuszczalne.

Niech u będzie najdłuższą drogą przechodzącą przez węzeł(y) zadania j w grafie $G(\pi_v,\alpha_v)$ podzieloną na bloki i W−sekwencje. Możliwa jest jedna z czterech następujących sytuacji:

i. czynność $2j-1$ i/lub $2j$ należy do pewnej W−sekwencji i nie jest ostatnią czynnością w tej sekwencji,

ii. czynność $2j-1$ lub $2j$ należy do pewnego bloku i nie jest ostatnią czynnością w tym bloku, *iii.* czynność $2j-1$ lub $2j$ jest ostatnią czynnością w ostatniej sekcji ścieżki krytycznej,

iv. żadna z czynności $2j-1$ i $2j$ nie należy do żadnej W–sekwencji i żadnego bloku.

Przypadek (*iii*) oznacza, że w przeglądanym otoczeniu nie ma już rozwiązań lepszych niż (π_v,α_v). W przypadku (*iv*) zostaje znalezione rozwiązanie, w którym żadna z czynności nie ma wpływu na wartość funkcji celu, zatem lepszego rozwiązania w otoczeniu nie można już znaleźć. W obu przypadkach przeszukiwanie otoczenia należy zakończyć. Dalej czynność, o której jest mowa w (*i*) lub (*ii*) będziemy nazywali krytyczną.

Niech $ps_\pi(i)$ ($ps_\alpha(i)$) będzie pozycją czynności i w permutacji z zestawu π (α) zawierającej czynność i. Na mocy Twierdzenia 2 każdy z ruchów ze zbioru:

$$W_{jk}=\{w=(j,k,x,y,z): x=ps_\pi(2j-1),\ y=1,...,\eta(\alpha_{2j-1}),\ z=1,...,\eta(\alpha_{2j})\} \tag{20}$$

zastosowany do rozwiązania (π_v,α_v) generuje rozwiązania nie lepsze od (π_v,α_v) w przypadku (*i*), natomiast każdy z ruchów odpowiednio ze zbioru

$$W_{jk}=\{w=(j,k,x,y,z): x=1,...,\eta(\pi_k)/2,\ y=ps_\alpha(2j-1),\ z=1,...,\eta(\alpha_{2j})\} \tag{21}$$

lub

$$W_{jk}=\{w=(j,k,x,y,z): x=1,...,\eta(\pi_k)/2,\ y=1,...,\eta(\alpha_{2j-1}),\ z=ps_\alpha(2j)\} \tag{22}$$

zastosowany do rozwiązania (π_v,α_v) generuje rozwiązania nie lepsze od (π_v,α_v) w przypadku (*ii*).

Łatwo można zauważyć, że zbiory tych ruchów nie zmieniają pozycji czynności leżących na ścieżce krytycznej, co jest warunkiem koniecznym Twierdzenia 2. Liczba ruchów (rozwiązań sąsiednich) w ten sposób wyeliminowanych wynosi odpowiednio: $\eta(\alpha_{2j-1})\eta(\alpha_{2j})$, $\eta(\alpha_{2j})\eta(\pi_k)/2$ oraz $\eta(\alpha_{2j-1})\eta(\pi_k)/2$.

Jednym sposobem na wygenerowanie rozwiązania sąsiedniego jest przesunięcie czynności krytycznej (pary w przypadku W–sekwencji) o co najmniej jedną pozycję w prawo. Jeżeli w wyniku takiej modyfikacji uzyskamy rozwiązanie dopuszczalne to opisane wyżej postępowanie powtarzamy. Łatwo można zauważyć, że tych powtórzeń będzie co najwyżej $\eta(\alpha_{2j-1})+\eta(\alpha_{2j})+\eta(\pi_k)/2$.

Niech $G'(j,\pi,\alpha)$ będzie grafem powstałym z $G(\pi,\alpha)$ przez usuniecie łuków $(B_\alpha(2j-1),2j-1))\in E(\alpha)$ oraz $(2j-1,A_\alpha(2j-1))\in E(\alpha)$, natomiast $G''(j,\pi,\alpha)$ będzie grafem powstałym z $G'(j,\pi,\alpha)$ przez usuniecie łuków $(B_\alpha(2j),2j))\in E(\alpha)$ oraz $(2j,A_\alpha(2j))\in E(\alpha)$. Metodę przeszukiwania sąsiedztwa dla ustalonego zadania j oraz wózka k można schematycznie przedstawić przy pomocy Procedury 1.

Procedura 1

Dane: π,α,j,k.

Szukane: v^*- ruch generujący najlepsze rozwiązanie sąsiednie.

1. Podstaw $v=(v_j,v_k,v_x,v_y,v_z)=(j,k,1,1,1)$, $v^*=v$.
2. Dla pary (π_v,α_v) skonstruuj graf $G(\pi_v,\alpha_v)$ oraz wyznacz czynność krytyczną i.
3. Jeżeli $F_{\max}(\pi_v,\alpha_v)<F_{\max}(\pi_{v^*},\alpha_{v^*})$ to podstaw $v^*=v$.
4. Jeżeli zachodzi (*iii*) lub (*iv*) to STOP
5. Jeżeli zachodzi
   a. (*i*) podstaw $v_x=v_x+2$.
   b. (*ii*) oraz $i=2j-1$ podstaw $v_y=v_y+1$.

c. (ii) oraz $i=2j$ podstaw $v_z=v_z+1$.

6. Dla $w_x=v_x$ wykonaj

6.1 Skonstruuj graf $G''(j,\pi_w,\alpha_w)$ oraz wyznacz dopuszczalną pozycję w_y czynności $2j-1$ w miejscu m_{2j-1} taką, że $w_y \geq v_y$ i w_y jest najmniejszą z możliwych.

6.2 Skonstruuj graf $G'(j,\pi_w,\alpha_w)$ oraz wyznacz dopuszczalną pozycję w_z czynności $2j$ w miejscu m_{2j} taką, że $w_z \geq v_z$ i w_z jest najmniejszą z możliwych.

6.3. Podstaw $v=w$, idź do kroku 2.

Konstrukcja grafu $G(\pi_v,\alpha_v)$ w kroku 2 oraz wyznaczenie czynności krytycznej i zajmuje $O(n)$ czasu. Bazując na wynikach obliczeń zrealizowanych w kroku 2, wartość $F_{\max}(\pi_v,\alpha_v)$ można obliczyć w czasie O(1). W tym samym czasie można zrealizować kroki 4 oraz 5. Konstrukcja $G''(\pi_w,\alpha_w)$ na podstawie $G(\pi_v,\alpha_v)$ zajmuje O(1), natomiast wyznaczenie dopuszczalnej pozycji w_y zajmuje $O(n)$. Na podstawie analizy kroku 6.1 wnioskujemy, że czas potrzebny na realizację kroku 6.2 wynosi również $O(n)$. Zatem wykonanie kroków 2–6 zajmuje $O(n)$.

Biorąc pod uwagę fakt, że w każdej iteracji zwiększany jest o 1 (w przypadku v_x o 2) jeden z elementów wektora v wnioskujemy, że liczba iteracji procedury nie może być większa od $\eta(\alpha_{2j-1})+\eta(\alpha_{2j})+\eta(\pi_k)/2$.

7. Podsumowanie

W pracy został opisany problem harmonogramowania zadań transportowych w systemach magazynowych. Przedstawiony jest model matematyczny oraz grafowy zagadnienia. Sformułowano twierdzenie bazujące na twierdzeniu blokowym pozwalające na eliminację rozwiązań nie lepszych od bieżącego oraz wskazujące sposoby generowania rozwiązań potencjalnie lepszych.

Zaproponowano nową metodę wykorzystania twierdzenia blokowego. W tej metodzie właściwości eliminacyjne twierdzenia blokowego stosowane są do generowanych na bieżąco rozwiązań sąsiednich celem wyeliminowania innych (nie lepszych). Przeprowadzono analizę złożoności tej metody z której wynika, że jej zastosowanie znacznie skraca czas przeglądania sąsiedztwa, szczególnie dla problemów o dużych rozmiarach. Metoda ta może być wykorzystana w konstrukcji algorytm popraw, dla tego i innych problemów, bazujących na metodach: przeszukiwania z zabronieniami, symulowanego wyżarzania, przeszukiwania genetycznego, przeszukiwania stadnego lub innych.

Praca częściowo finansowana z projektu badawczego MNiSW nr N N514 232237.

Literatura

1. Gu J., Goetschalckx M., McGinnis L.F.: Review Research on warehouse operation: A comprehensive review. European Journal of Operational Research 177, 1, 2007, p. 1–21.
2. Daniels R.L., Rummel J.L., Schantz R.: A model for warehouse order picking. European Journal of Operational Research 105, 1998, p. 1–17.
3. Ratliff H.D., Rosenthal A.S.: Order-picking in a rectangular warehouse: A solvable case of the traveling salesman problem. Operations Research 31, 3, 1983, p. 507–521.

4. Roodbergen K.J., de Koster R.: Routing methods for warehouses with multiple cross aisles. International Journal of Production Research 39, 9, 2001, p. 1865–1883.
5. Grabowski J.: On two-machine scheduling with release and due dates to minimize maximum lateness. Opsearch 17, 1980, p. 133–154.
6. Grabowski J.: A new algorithm of solving the flow-shop problem. Operations Research in Progress. D. Reidel Publishing Company, 1982, p. 57–75.
7. Grabowski J., Nowicki E., Zdrzałka S.: A block approach for single machine scheduling with release dates and due dates. European Journal of Operational Research 26, 1986, p. 278–285.
8. Grabowski J., Skubalska E., Smutnicki C.: On flow-shop scheduling with release and due dates to minimize maximum lateness. Journal of Operational Research Society 34, 1983, p. 615–620.
9. Grabowski J., Nowicki E., Smutnicki C.: Block algorithm for scheduling of operations in job shop system. Przegląd Statystyczny 35, (1988), s. 67–80.
10. Zdrzałka S., Grabowski J.: An algorithm for single machine sequencing with release dates to minimize maximum cost. Discrete Applied Mathematics 23, 1989, p. 73–89.
11. Grabowski J., Smutnicki C.: A block approach for flow shop scheduling to minimize maximum cost. Proc. of XIII Conference of Cybernetics and Systems '96, Vienna, 1996, p. 826–831.
12. Nowicki E., Smutnicki C.: A fast tabu search algorithm for the permutation flow-shop problem, European Journal of Operational Research 91, 1996, p. 160–175.
13. Nowicki E., Smutnicki C.: A fast tabu search algorithm for the job-shop problem. Management Science 42, 1996, p. 797–813.

Dr inż. Jarosław PEMPERA
Instytut Automatyki, Informatyki i Robotyki
Politechnika Wrocławska
50-372 Wrocław, ul. Wybrzeże Wyspiańskiego 27
tel./fax.: (71) 320-28-34
e-mail: jaroslaw.pempera@pwr.wroc.pl