

ROZMYTA METODA TOPSIS WYKORZYSTUJĄCA SKIEROWANE LICZBY ROZMYTE

Katarzyna RUDNIK, Dariusz KACPRZAK

Streszczenie: Podejmowanie decyzji w ujęciu wielokryterialnym (*MCDM*) stanowi szybko rozwijający się obszar badań nad złożonymi problemami decyzyjnymi. Celem pracy jest przedstawienie nowego podejścia do rozmytych metod rankingowych poprzez zastosowanie modelu skierowanych liczb rozmytych. W szczególności zastosowano model do rankingowania rozmytą metodą *TOPSIS*. Proponowana metoda pozwala analitykom decyzji lepiej zrozumieć cały proces oceny oraz dostarcza skutecznego i systematycznego narzędzia wspomagania decyzji. Zastosowanie metody pokazano na przykładzie wyboru dostawcy.

Słowa kluczowe: skierowane liczby rozmyte (*OFN*), wielokryterialne podejmowanie decyzji (*MCDM*), rozmyta metoda *TOPSIS*, wybór dostawcy.

1. Wprowadzenie

Podejmowanie decyzji stanowi integralną część zarządzania, planowania i sterowania w przedsiębiorstwie oraz w życiu codziennym. Złożone procesy decyzyjne wymagają jednak wsparcia ze strony metod i narzędzi, które dysponują gotowymi procedurami postępowania w celu zmniejszenia niepewności, rozwiązania konfliktów, ograniczenia ilości argumentów oraz wskazania odpowiedniego rankingu kryteriów bądź proponowanych rozwiązań. Wówczas właściwym podejściem staje się rozwiązywanie problemów decyzyjnych w ujęciu wielokryterialnym (*MCDM*, ang. *Multi-Criteria Decision Making*). W literaturze, wyróżnia się dwa rozgałęzienia powyższego podejścia: wielo-trybutowe podejmowanie decyzji (*MADM*, ang. *Multiple Attribute Decision Making*) oraz wielo-obiektowe podejmowanie decyzji (*MODM*, ang. *Multiple Objective Decision Making*) [1]. W ramach obu podejść można wyróżnić wiele deterministycznych, stochastycznych i rozmytych metod analizy problemów [2].

Metoda *TOPSIS* (ang. *Technique for Order Preference using Similarity to Ideal Solution*) jest użytecznym narzędziem, które służy do rankingowania wariantów (alternatyw, kryteriów) podczas procesu podejmowania decyzji. Czynnikiem wyróżniającym tę metodę jest wykorzystywanie miary względnej odległości do najlepszego rozwiązania, stanowiącego wzorzec (ideał) i najgorszego rozwiązania, stanowiącego antywzorzec (antyideał). Wg [3] rozmyta metoda *TOPSIS* stanowi najlepsze narzędzie do rozwiązywania problemów w środowisku niepewnych i nieprecyzyjnych danych np. dotyczących wyboru dostawców. Metoda ta pozwala na przedstawienie ocen wariantów w postaci opisowej (lingwistycznej), co stanowi ułatwienie podczas procesu podejmowania decyzji. W artykule proponuje się zastosowanie w tym celu modelu skierowanych liczb rozmytych [4] (*OFN*, ang. *Ordered Fuzzy Numbers*). Umożliwia on dodatkowo błyskawiczne rozróżnienie typu kryteriów („zysk”, „strata”). Jest to możliwe dzięki wykorzystaniu skierowania liczb rozmytych podczas przydzielania rozmytych ocen wariantom względem analizowanych kryteriów.

Praca składa się z pięciu części. W drugiej zaprezentowano podstawowe informacje na temat metody *TOPSIS* oraz rozmytej metody *TOPSIS*. W części trzeciej przybliżono zagadnienia związane ze skierowanymi liczbami rozmytymi. Następnie zaproponowano metodę *FTOPSIS* wykorzystującą skierowane liczby rozmyte. Metodę zweryfikowano na podstawie typowego przykładu wielokryterialnego problemu decyzyjnego w przedsiębiorstwie – problemu wyboru dostawców. Praca kończy się podsumowaniem.

2. Metoda *TOPSIS* oraz jej rozmyte rozszerzenia

Metoda *TOPSIS* stanowi jedną z najbardziej znanych metod rankingowych w ramach podejścia *MCDM*. Celem metody jest określenie idealnego i anty idealnego rozwiązania, wskazanie względnej odległości alternatyw od tych rozwiązań oraz określenie wariantu, który charakteryzowałby się maksymalną względną bliskością do ideału oraz minimalną względną bliskością do antyideału [5].

Aby rozwiązać problem zbytniego subiektywizmu w podejmowaniu decyzji oraz dwuznaczności dostępnych informacji włączono teorię zbiorów rozmytych [6] do analizy problemów metodą *TOPSIS*. Za prekursora rozmytej metody *TOPSIS* (*FTOPSIS*) uważa się Chen'a [7]. Problem decyzyjny najczęściej jest opisany za pomocą macierzy decyzyjnej, stanowiącej ocenę M wariantów (D_1, \dots, D_M) , względem N kryteriów (K_1, \dots, K_N) , gdzie oceny wariantów opisane są liczbami rozmytymi. W metodzie tej dokonuje się podziału kryteriów na dwie grupy: typu "zysk" (im więcej, tym lepiej) oraz typu "strata" (im mniej, tym lepiej). Następnie normalizuje się elementy macierzy decyzyjnej w celu zapewnienia porównywalności wartości ocen poszczególnych wariantów decyzyjnych względem kolejnych kryteriów. Wektor wag $w = [w_1, w_2, \dots, w_N]$, opisujący wagi dla N kryteriów, pozwala na zróżnicowanie ocen z uwzględnieniem relatywnego znaczenia kryteriów. W konsekwencji rozmyta metoda *TOPSIS* pozwala wyznaczyć syntetyczny miernik oceny wariantu decyzyjnego, w oparciu o względną bliskość z idealnym (antyidealnym) rozwiązaniem.

W ostatnich latach można znaleźć szerokie spektrum zastosowań rozmytej metody *TOPSIS*. Metoda ta jest wykorzystywana m.in. do wyboru dostawcy [3, 8], wyboru projektów i ocena ryzyka [9], oceny jakości stron internetowych [10], wyboru lokalizacji obiektu [11] itp. Można również znaleźć podejścia hybrydowe. W [12] proponuje się integrację metody *FTOPSIS* i programowania liniowego do oceny ryzyka kredytów. Sun [13] i inni [14, 15] proponują tworzenie modeli decyzyjnych i rankingów w oparciu o integrację metod *FAHP* i *FTOPSIS*. Analiza literaturowa wskazuje, iż nie stosowano podejścia łączącego rozmytej metody *TOPSIS* i modelu skierowanych liczb rozmytych.

3. Skierowane liczby rozmyte

Model skierowanych liczb rozmytych został zaproponowany w 2002 roku przez prof. Witolda Kosińskiego, Piotra Prokopowicza i Dominika Ślęzaka [4, 16-18]. Skierowaną liczbą rozmytą A nazywamy uporządkowaną parę funkcji ciągłych

$$A = (f_A, g_A), \quad (1)$$

gdzie

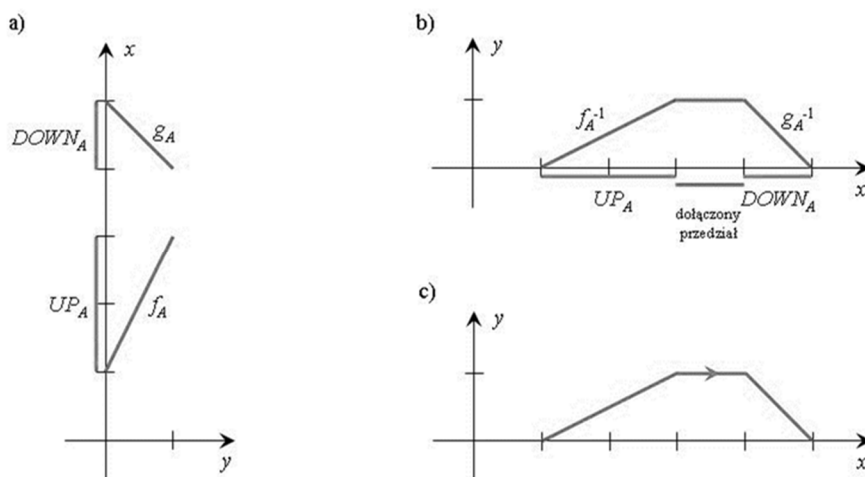
$$f_A, g_A : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}. \quad (2)$$

Poszczególne funkcje skierowanej liczby rozmytej nazywamy odpowiednio: f_A – częścią wznoszącą (*UP*), g_A – częścią opadającą (*DOWN*) [zob. rys. 1a]. Ponieważ obie te funkcje są ciągłe, to ich obrazy są ograniczonymi przedziałami odpowiednio UP_A i $DOWN_A$,

których granice oznaczamy następująco $UP_A = (l_A, 1_A^-)$ oraz $DOWN_A = (1_A^+, p_A)$, gdzie $l_A = f(0)$, $1_A^- = f(1)$, $1_A^+ = g(1)$, $p_A = g(0)$. Na rysunku 1a przedstawiono ilustrację graficzną skierowanej liczby rozmytej, gdzie y jest argumentem funkcji f_A i g_A , natomiast x wartością tych funkcji. Do zbiorów UP_A oraz $DOWN_A$ dodajemy na przedziale $[1_A^-, 1_A^+]$ (przedział ten może być jednoelementowy) funkcję stałą (*CONST*) równą 1 (warunek normalności). Wówczas zbiór $UP_A \cup [1_A^-, 1_A^+] \cup DOWN_A$ tworzy jeden przedział (nośnik liczby A). Jeżeli funkcje f_A i g_A są ściśle monotoniczne, istnieją do nich funkcje odwrotne f_A^{-1} i g_A^{-1} określone na odpowiednich przedziałach UP_A i $DOWN_A$ [zob. rys. 1b]. Wówczas możemy określić funkcję przynależności μ_A skierowanej liczby rozmytej A w następujący sposób [19, 20]:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } x \notin [l_A, p_A] \\ f_A^{-1}(x) & \text{gdy } x \in UP_A \\ 1 & \text{gdy } x \in [1_A^-, 1_A^+] \\ g_A^{-1}(x) & \text{gdy } x \in DOWN_A \end{cases} \quad (3)$$

Tak określone liczby rozmyte nawiązują do wypukłych liczb rozmytych (*CFN*), są jednak wyposażone w dodatkową własność zaznaczoną strzałką – skierowanie [zob. rys. 1c]. Graficznie liczba (f_A, g_A) nie różni się od liczby (g_A, f_A) , jednak w rzeczywistości są to dwie różne liczby, różniące się skierowaniem.



Rys 1. a) Przykładowa skierowana liczba rozmyta, b) skierowana liczba rozmyta przedstawiona w sposób nawiązujący do wypukłych liczb rozmytych, c) strzałka przedstawiająca porządek odwróconych funkcji i orientację skierowanej liczby rozmytej
 Źródło: [16]

Szczególnym przypadkiem skierowanych liczb rozmytych są liczby rzeczywiste. W modelu *OFN* są one utożsamiane z parą funkcji stałych. Dokładniej, liczba $r \in \mathbb{R}$ jest zapisywana jako skierowana liczba rozmyta postaci $r = (r^*, r^*)$, gdzie $r^*(y) = r$ dla $y \in [0, 1]$.

Podstawowe działania arytmetyczne, czyli dodawanie (+), odejmowanie (-), mnożenie (\cdot) i dzielenie ($/$), na skierowanych liczbach rozmytych określone są następująco. Niech $A = (f_A, g_A)$, $B = (f_B, g_B)$ będą skierowanymi liczbami rozmytymi.

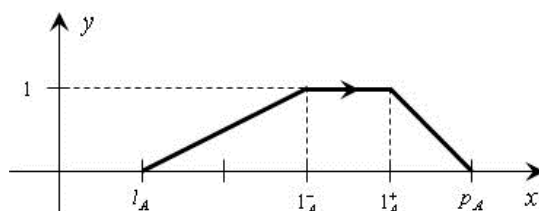
Wówczas liczba $C = (f_C, g_C)$ jest wynikiem działania $(*)$ na skierowanych liczbach rozmytych A i B ($C = A * B$), jeżeli:

$$\forall y \in [0,1] [f_A(y) * f_B(y) = f_C(y) \text{ i } g_A(y) * g_B(y) = g_C(y)]. \quad (4)$$

Działanie $(*)$ oznacza jedno z podstawowych działań arytmetycznych. W przypadku dzielenia dodatkowo musi być spełniony warunek, że $\forall y \in [0,1] f_B(y) \neq 0$ i $g_B(y) \neq 0$. Zbiór skierowanych liczb rozmytych z tak określonymi działaniami ma strukturę przestrzeni liniowo-topologicznej [18].

W określeniu funkcji przynależności skierowanej liczby rozmytej (3) pojawiają się cztery parametry $l_A, 1_A^-, 1_A^+, p_A$, które w sposób jednoznaczny opisują tę liczbę. Wynika stąd, że skierowaną liczbę rozmytą można reprezentować za pomocą tych czterech elementów [zob. rys. 2]:

$$A = (l_A \ 1_A^- \ 1_A^+ \ p_A). \quad (5)$$



Rys. 2. Przykładowa OFN wraz z charakterystycznymi punktami

Źródło: [20]

Taka reprezentacja OFN umożliwia szybkie wykonywanie działań arytmetycznych. Jeżeli $A = (l_A \ 1_A^- \ 1_A^+ \ p_A)$ i $B = (l_B \ 1_B^- \ 1_B^+ \ p_B)$ będą skierowanymi liczbami rozmytymi oraz $r \in \mathbb{R}$. Wówczas dodawanie i odejmowanie skierowanych liczb rozmytych oraz mnożenie skierowanej liczby rozmytej przez liczbę rzeczywistą wyglądają następująco:

- $A \pm B = (l_A \pm l_B \ 1_A^- \pm 1_B^- \ 1_A^+ \pm 1_B^+ \ p_A \pm p_B)$,
- $rA = (rl_A \ r1_A^- \ r1_A^+ \ rp_A)$.

Interesujące przykłady zastosowania operacji arytmetycznych na skierowanych liczbach rozmytych można znaleźć m.in. w pracy [21].

W kolejnej części pracy opisano wykorzystanie skierowanych liczb rozmytych w metodzie FTOPSIS.

4. Propozycja rozmytej metody TOPSIS z zastosowaniem skierowanych liczb rozmytych

W procesie tworzenia syntetycznego miernika dla ocen wariantów decyzyjnych, bazującym na metodzie FTOPSIS z zastosowaniem skierowanych liczb rozmytych, można wyróżnić następujące etapy obliczeń.

Dane wejściowe:

- Liczba ocenianych wariantów decyzyjnych: M .
- Liczba kryteriów: N .
- Macierz decyzyjna X^* :

$$X^* = \begin{bmatrix} x_{11}^* & x_{12}^* & \cdots & x_{1N}^* \\ x_{21}^* & x_{22}^* & \cdots & x_{2N}^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{M1}^* & x_{M2}^* & \cdots & x_{MN}^* \end{bmatrix}, \quad (6)$$

gdzie x_{ij}^* stanowi nierozmytą (ostrą) ocenę i -tego wariantu względem j -tego kryterium.

- Skalarny wektor wag:

$$w = [w_1, w_2, \dots, w_N], \quad (7)$$

gdzie $w_n \in \mathbb{R}$ ($w_n > 0, n = 1, \dots, N$) stanowi wagę n -tego kryterium, przy czym $w_1 + \dots + w_N = 1$.

ETAP 1. Utworzenie rozmytej macierz decyzyjnej X :

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1N} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{M1} & x_{M2} & \dots & x_{MN} \end{bmatrix}, \quad (8)$$

gdzie $x_{ij} = (l_{ij} \ 1_{ij}^- \ 1_{ij}^+ \ p_{ij})$ ($i = 1, \dots, M, j = 1, \dots, N$) są skierowanymi liczbami rozmytymi. Rozmyta macierz decyzyjna powstaje na podstawie zamiany ostrych ocen x_{ij}^* na oceny wyrażone za pomocą skierowanych liczb rozmytych x_{ij} . Transformacji dokonuje się poprzez rozszerzenie nośnika oceny do wartości estymowanych lub założonych przedziałów niepewności oceny. Należy przy tym zaznaczyć, iż skierowanie liczby OFN wskazuje na typ kryterium. W przypadku kryterium typu „strata” skierowanie liczby rozmytej posiada zwrot w kierunku wartości 0 (im mniejsza wartość, tym lepiej). W przypadku kryterium typu „zysk” – skierowanie liczby rozmytej posiada zwrot w kierunku nieskończoności (im większa wartość, tym lepiej).

ETAP 2. Utworzenie znormalizowanej rozmytej macierz decyzyjnej Z :

$$Z = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} & \dots & z_{1N} \\ z_{21} & z_{22} & \dots & z_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{M1} & z_{M2} & \dots & z_{MN} \end{bmatrix}, \quad (9)$$

gdzie

$$z_{ij} = \begin{cases} \left(\frac{l_{ij}}{\max_i p_{ij}} \quad \frac{1_{ij}^-}{\max_i p_{ij}} \quad \frac{1_{ij}^+}{\max_i p_{ij}} \quad \frac{p_{ij}}{\max_i p_{ij}} \right) & \text{gdy } K_j - \text{ kryterium typu "zysk"} \\ \left(\frac{\min_i p_{ij}}{l_{ij}} \quad \frac{\min_i p_{ij}}{1_{ij}^-} \quad \frac{\min_i p_{ij}}{1_{ij}^+} \quad \frac{\min_i p_{ij}}{p_{ij}} \right) & \text{gdy } K_j - \text{ kryterium typu "strata"} \end{cases} \quad (10)$$

ETAP 3. Utworzenie ważonej znormalizowanej rozmytej macierz decyzyjnej V :

$$V = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \dots & v_{1N} \\ v_{21} & v_{22} & \dots & v_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{M1} & v_{M2} & \dots & v_{MN} \end{bmatrix}, \quad (11)$$

gdzie $v_{ij} = z_{ij} \cdot w_j$ ($i = 1, \dots, M, j = 1, \dots, N$).

ETAP 4. Znalezienie ideału (pozytywnego ideału, wzorca) A^+ i antyideału (negatywnego ideału, antywzorca) A^- dla ocen względem każdego kryterium, przy czym:

$$A^+ = (v_1^+, v_2^+, \dots, v_N^+), \quad (12)$$

gdzie $v_j^+ = \left(\max_i l_{vij} \quad \max_i 1_{vij}^- \quad \max_i 1_{vij}^+ \quad \max_i p_{vij} \right), j = 1, \dots, N$,

oraz

$$A^- = (v_1^-, v_2^-, \dots, v_N^-), \quad (13)$$

gdzie $v_j^- = \left(\min_i l_{vij} \quad \min_i 1_{vij}^- \quad \min_i 1_{vij}^+ \quad \min_i p_{vij} \right), j = 1, \dots, N$.

ETAP 5. Wyliczenie odległości ocen poszczególnych wariantów od ideału i antyideału za pomocą następujących zależności:

$$d_i^+ = \sum_{j=1}^N d(v_{ij}, v_j^+), i = 1, \dots, M \quad \text{oraz} \quad d_i^- = \sum_{j=1}^N d(v_{ij}, v_j^-), i = 1, \dots, M, \quad (14)$$

gdzie

$$d(A, B) = \sqrt{\frac{1}{4}[(l_A - l_B)^2 + (1_A^- - 1_B^-)^2 + (1_A^+ - 1_B^+)^2 + (p_A - p_B)^2]}, \quad (15)$$

gdzie $A = (l_A \quad 1_A^- \quad 1_A^+ \quad p_A)$ i $B = (l_B \quad 1_B^- \quad 1_B^+ \quad p_B)$.

ETAP 6. Wyznaczenie syntetycznego miernika ocen wariantów CC_i za pomocą względnej bliskości ocen wariantów od ideałów:

$$CC_i = \frac{d_i^-}{d_i^+ + d_i^-}, i = 1, \dots, M. \quad (16)$$

Im mniejsza jest odległość oceny wariantu od ideału, a tym samym większa jest jej odległość od antyideału, tym wartość miernika jest bliższa 1.

ETAP 7. Utworzenie rankingu dla M wariantów na podstawie uporządkowania liniowego mierników syntetycznych $CC_i, i = 1, \dots, M$.

5. Przykład zastosowania proponowanej metody do oceny i wyboru dostawców

Przedstawioną rozmytą metodę *TOPSIS* zastosowano do oceny i wyboru dostawców w łańcuchu dostaw. Współczesny rynek, charakteryzujący się dużą konkurencyjnością, wywiera presję na przedsiębiorstwach. Firmy starając się zwiększyć swoją atrakcyjność usprawniają procesy, podnoszą jakość swoich produktów/usług oraz obniżają koszty. Wówczas szczególnego znaczenia nabiera jakość, elastyczność i czas reakcji w łańcuchu dostaw. Ocena dostawców oraz ich wybór jest jednym z krytycznych elementów łańcucha dostaw. Z uwagi na istnienie zarówno materialnych, jak i niematerialnych czynników oceny, problem wyboru dostawców powinien być zagadnieniem wielokryterialnego podejmowania decyzji. W [22] określono szereg różnych kryteriów, które można zastosować do problemu wyboru dostawców. Decyzje często bazują na danych jakościowych i indywidualnych opiniach, stąd sugeruje się zastosowanie rozmytych metod analizy. Przegląd stosowanych narzędzi można znaleźć w [23, 24]. Szybko zmieniająca się koniunktura rynku powoduje, iż raz utworzony ranking dostawców nie może stanowić kryterium ich wyboru w dłuższym okresie czasu.

Rysunek 3 przedstawia strukturę problemu wyboru dostawców tarcicy dla przedsiębiorstwa produkcyjnego. W przykładzie rozważa się następujące kryteria oceny:

K_1 – cenę surowca (zł/m³),

K_2 – jakość surowca (skala 0, ..., 10),

K_3 – czas dostawy (godz.),

K_4 – elastyczność dostaw (skala 0, ..., 10),

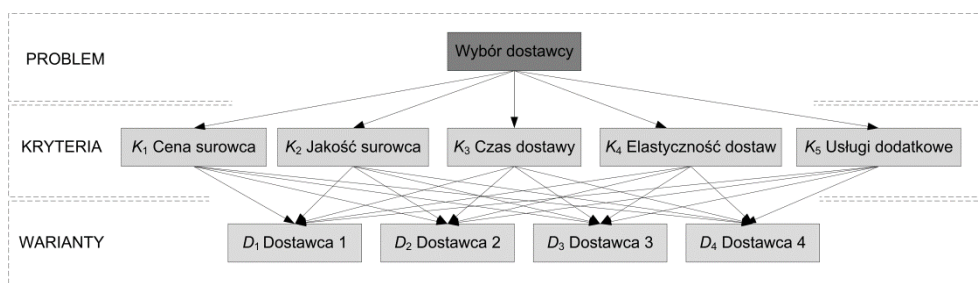
K_5 – realizacja usług dodatkowych (ilość usług dodatkowych).

Kryteria K_2, K_4, K_5 mają charakter stymulant (są typu „zysk”, im wyższe wartości ocen, tym lepiej), natomiast kryteria K_1, K_3 mają charakter destymulant (są typu „strata”, im niższe wartości ocen, tym lepiej). W przypadku zakupu tarcicy usługami dodatkowymi mogą być: korowanie, suszenie, termowanie, cięcie na wymiar, transport, rozładunek itp..

Podczas analizy zdefiniowano następujące wagi dla wymienionych wyżej kryteriów:

$$w = (0,2; 0,3; 0,15; 0,1; 0,25).$$

Wagi stanowią o relatywnym znaczeniu każdego z kryteriów.



Rys. 3. Struktura problemu wyboru dostawcy
Źródło: opracowanie własne

Rolę ekspertów dokonujących ocen dostawców pełnili pracownicy działu zakupów przedsiębiorstwa produkcyjnego. Tabela 1 przedstawia dane wejściowe dla ocen. Zostały one określone na podstawie historii dokonywanych zakupów przez przedsiębiorstwo oraz oszacowań wartości średnich dokonanych przez ekspertów. Następnie dane wejściowe zostały rozmyte za pomocą skierowanych liczb rozmytych i zapisane w postaci $(l_{ij} \ 1_{ij}^- \ 1_{ij}^+ \ p_{ij})$. Typ kryterium („zysk”, „strata”) wpływa na skierowanie liczb rozmytych. Powstała w ten sposób rozmyta macierz decyzyjna została zamieszczona w tabeli 2. Korzystając z wzoru (10), rozmyta macierz decyzyjna została znormalizowana, z uwzględnieniem typu kryterium. Przykładowo dla kryterium cena surowca (K_1) normalizacja oceny dostawcy D_1 została wyznaczona na podstawie następującego przekształcenia:

$$z_{11} = \left(\frac{\min_i p_{i1}}{l_{11}} \quad \frac{\min_i p_{i1}}{1_{11}^-} \quad \frac{\min_i p_{i1}}{1_{11}^+} \quad \frac{\min_i p_{i1}}{p_{11}} \right) = \left(\frac{900}{1500} \quad \frac{900}{1300} \quad \frac{900}{1100} \quad \frac{900}{900} \right) = (0,6 \ 0,96 \ 0,82 \ 1).$$

Natomiast w przypadku jakości surowca (K_2) – kryterium o charakterystyce „zysk” – normalizację rozmytej oceny dostawcy D_4 obliczono za pomocą wzoru:

$$z_{42} = \left(\frac{l_{42}}{\max_i p_{i2}} \quad \frac{1_{42}^-}{\max_i p_{i2}} \quad \frac{1_{42}^+}{\max_i p_{i2}} \quad \frac{p_{42}}{\max_i p_{i2}} \right) = \left(\frac{7}{9} \quad \frac{7,5}{9} \quad \frac{8,5}{9} \quad \frac{9}{9} \right) = (0,78 \ 0,83 \ 0,94 \ 1).$$

W powyższych przypadkach liczby rozmyte stanowią najwyższe oceny względem kryteriów odpowiednio ceny i jakości surowca. Wszystkie wyniki normalizacji zamieszczono w tablicy 3.

Tab. 1 Dane wejściowe dla oceny dostawców

| | K_1 | K_2 | K_3 | K_4 | K_5 |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| D_1 | 1200 | 4 | 48 | 5 | 5 |
| D_2 | 1800 | 7 | 72 | 6 | 7 |
| D_3 | 1300 | 5 | 96 | 8 | 5 |
| D_4 | 2000 | 8 | 120 | 6 | 2 |

Źródło: opracowanie własne

Tab. 2 Rozmyte wartości ocen dostawców D_1, \dots, D_4 względem kryteriów K_1, \dots, K_5 (rozmyta macierz decyzyjna V)

| | K_1 | | | | K_2 | | | | K_3 | | | | K_4 | | | | K_5 | | | |
|-------|----------|------------|------------|----------|----------|------------|------------|----------|----------|------------|------------|----------|----------|------------|------------|----------|----------|------------|------------|----------|
| | l_{i1} | 1_{i1}^- | 1_{i1}^+ | p_{i1} | l_{i2} | 1_{i2}^- | 1_{i2}^+ | p_{i2} | l_{i3} | 1_{i3}^- | 1_{i3}^+ | p_{i3} | l_{i4} | 1_{i4}^- | 1_{i4}^+ | p_{i4} | l_{i5} | 1_{i5}^- | 1_{i5}^+ | p_{i5} |
| D_1 | 1500 | 1300 | 1100 | 900 | 3 | 3,5 | 4,5 | 5 | 63 | 53 | 43 | 33 | 4 | 4,5 | 5,5 | 6 | 3,5 | 5 | 5 | 6,5 |
| D_2 | 2100 | 1900 | 1700 | 1500 | 6 | 6,5 | 7,5 | 8 | 87 | 77 | 67 | 57 | 5 | 5,5 | 6,5 | 7 | 5,5 | 7 | 7 | 8,5 |
| D_3 | 1600 | 1400 | 1200 | 1000 | 4 | 4,5 | 5,5 | 6 | 111 | 101 | 91 | 81 | 7 | 7,5 | 8,5 | 9 | 3,5 | 5 | 5 | 6,5 |
| D_4 | 2300 | 2100 | 1900 | 1700 | 7 | 7,5 | 8,5 | 9 | 135 | 125 | 115 | 105 | 5 | 5,5 | 6,5 | 7 | 0,5 | 2 | 2 | 3,5 |

Źródło: opracowanie własne

Tab. 3 Rozmyte znormalizowane wartości ocen dostawców D_1, \dots, D_4 względem kryteriów K_1, \dots, K_5 (znormalizowana rozmyta macierz decyzyjna V)

| | K_1 | | | | K_2 | | | | K_3 | | | | K_4 | | | | K_5 | | | |
|-------|----------|------------|------------|----------|----------|------------|------------|----------|----------|------------|------------|----------|----------|------------|------------|----------|----------|------------|------------|----------|
| | l_{i1} | 1_{i1}^- | 1_{i1}^+ | p_{i1} | l_{i2} | 1_{i2}^- | 1_{i2}^+ | p_{i2} | l_{i3} | 1_{i3}^- | 1_{i3}^+ | p_{i3} | l_{i4} | 1_{i4}^- | 1_{i4}^+ | p_{i4} | l_{i5} | 1_{i5}^- | 1_{i5}^+ | p_{i5} |
| D_1 | 0,6 | 0,69 | 0,82 | 1 | 0,33 | 0,39 | 0,5 | 0,56 | 0,52 | 0,62 | 0,77 | 1 | 0,44 | 0,5 | 0,61 | 0,67 | 0,41 | 0,59 | 0,59 | 0,76 |
| D_2 | 0,43 | 0,47 | 0,53 | 0,6 | 0,67 | 0,72 | 0,83 | 0,89 | 0,38 | 0,43 | 0,49 | 0,58 | 0,56 | 0,61 | 0,72 | 0,78 | 0,65 | 0,82 | 0,82 | 1 |
| D_3 | 0,56 | 0,64 | 0,75 | 0,9 | 0,44 | 0,5 | 0,61 | 0,67 | 0,3 | 0,33 | 0,36 | 0,41 | 0,78 | 0,83 | 0,94 | 1 | 0,41 | 0,59 | 0,59 | 0,76 |
| D_4 | 0,39 | 0,43 | 0,47 | 0,53 | 0,78 | 0,83 | 0,94 | 1 | 0,24 | 0,26 | 0,29 | 0,31 | 0,56 | 0,61 | 0,72 | 0,78 | 0,06 | 0,24 | 0,24 | 0,41 |

Źródło: opracowanie własne

Następnie, wykorzystując wektor wag kryteriów w , wyliczono ważoną znormalizowaną rozmytą macierz decyzyjną V (tab. 4). Macierz ta jest wykorzystana do wyznaczenia rozmytego ideału i antyideału oceny według formuł (12)-(13):

$$A^+ = ((0,12 \ 0,14 \ 0,16 \ 0,2), (0,23 \ 0,25 \ 0,28 \ 0,3), \dots, (0,16 \ 0,21 \ 0,21 \ 0,25)),$$

$$A^- = ((0,08 \ 0,09 \ 0,09 \ 0,11), (0,1 \ 0,12 \ 0,15 \ 0,17), \dots, (0,01 \ 0,06 \ 0,06 \ 0,1)).$$

Ważoną, rozmytą i znormalizowaną ocenę względem każdego kryterium porównano z ideałem i antyideałem na zasadzie odległości (wzór (15)), a następnie ustalono sumaryczną odległość od wzorca i antywzorca dla każdego z dostawców (wzór (14)).

Przykład odległości oceny dostawcy D_1 od ideału wynosi:

$$d_1^+ = \sum_{j=1}^N d(v_{1j}, v_j^+) = \sqrt{\frac{1}{4}[(0,12 - 0,12)^2 + (0,14 - 0,14)^2 + (0,16 - 0,16)^2 + (0,2 - 0,2)^2] + \dots + \sqrt{\frac{1}{4}[(0,1 - 0,16)^2 + (0,15 - 0,21)^2 + (0,15 - 0,21)^2 + (0,19 - 0,25)^2]} = 0,000 + 0,133 + 0,000 + 0,033 + 0,059 = 0,225.$$

oraz antyideału:

$$d_1^- = \sum_{j=1}^N d(v_{1j}, v_j^-) = \sqrt{\frac{1}{4}[(0,12 - 0,08)^2 + (0,14 - 0,09)^2 + (0,16 - 0,09)^2 + (0,2 - 0,11)^2] + \dots + \sqrt{\frac{1}{4}[(0,1 - 0,1)^2 + (0,15 - 0,06)^2 + (0,15 - 0,06)^2 + (0,19 - 0,1)^2]} = 0,067 + 0,000 + 0,071 + 0,000 + 0,088 = 0,227.$$

Wówczas, wartość syntetycznej oceny dla dostawcy D_1 wynosi:

$$CC_1 = \frac{d_1^-}{d_1^+ + d_1^-} = \frac{0,227}{0,225 + 0,227} = 0,5.$$

Wyniki szczegółowe przedstawia tabela 5. Obliczenia wskazują, iż uzyskany ranking dostawców ma postać:

Dostawca $D_4 < D_3 < D_1 < D_2$.

Można zatem wnioskować, iż z perspektywy założonych kryteriów oraz ich relacji ważności, najlepszym dostawcą tarcicy dla przedsiębiorstwa produkcyjnego okazał się dostawca D_2 . Mimo wysokiej ceny i przeciętnej elastyczności dostaw, oferuje on stosunkowo wysoką jakość surowca, przy relatywnie krótkim okresie dostawy oraz dużej ilości proponowanych usług dodatkowych.

Tab. 4 Ważone rozmyte znormalizowane wartości ocen dostawców D_1, \dots, D_4 względem kryteriów K_1, \dots, K_5 (ważona znormalizowana rozmyta macierz decyzyjna V)

| | K_1 | | | | K_2 | | | | K_3 | | | | K_4 | | | | K_5 | | | |
|-------|----------|------------|------------|----------|----------|------------|------------|----------|----------|------------|------------|----------|----------|------------|------------|----------|----------|------------|------------|----------|
| | l_{i1} | 1_{i1}^- | 1_{i1}^+ | p_{i1} | l_{i2} | 1_{i2}^- | 1_{i2}^+ | p_{i2} | l_{i3} | 1_{i3}^- | 1_{i3}^+ | p_{i3} | l_{i4} | 1_{i4}^- | 1_{i4}^+ | p_{i4} | l_{i5} | 1_{i5}^- | 1_{i5}^+ | p_{i5} |
| D_1 | 0,12 | 0,14 | 0,16 | 0,2 | 0,1 | 0,12 | 0,15 | 0,17 | 0,08 | 0,09 | 0,12 | 0,15 | 0,04 | 0,05 | 0,06 | 0,07 | 0,1 | 0,15 | 0,15 | 0,19 |
| D_2 | 0,09 | 0,09 | 0,11 | 0,12 | 0,2 | 0,22 | 0,25 | 0,27 | 0,06 | 0,06 | 0,07 | 0,09 | 0,06 | 0,06 | 0,07 | 0,08 | 0,16 | 0,21 | 0,21 | 0,25 |
| D_3 | 0,11 | 0,13 | 0,15 | 0,18 | 0,13 | 0,15 | 0,18 | 0,2 | 0,04 | 0,05 | 0,05 | 0,06 | 0,08 | 0,08 | 0,09 | 0,1 | 0,1 | 0,15 | 0,15 | 0,19 |
| D_4 | 0,08 | 0,09 | 0,09 | 0,11 | 0,23 | 0,25 | 0,28 | 0,3 | 0,04 | 0,04 | 0,04 | 0,05 | 0,06 | 0,06 | 0,07 | 0,08 | 0,01 | 0,06 | 0,06 | 0,1 |

Źródło: opracowanie własne

Tab. 5 Odległości ocen od ideału i antyideału oraz ranking końcowy dostawców

| | Odległość od ideału | | | | | | Odległość od antyideału | | | | | | CC_i | RANK |
|-------|---------------------|-------|-------|-------|-------|---------|-------------------------|-------|-------|-------|-------|---------|--------|------|
| | K_1 | K_2 | K_3 | K_4 | K_5 | d_j^+ | K_1 | K_2 | K_3 | K_4 | K_5 | d_j^- | | |
| D_1 | 0 | 0,13 | 0 | 0,03 | 0,06 | 0,23 | 0,07 | 0 | 0,07 | 0 | 0,09 | 0,23 | 0,5 | 2 |
| D_2 | 0,06 | 0,03 | 0,04 | 0,02 | 0 | 0,15 | 0,01 | 0,1 | 0,03 | 0,01 | 0,15 | 0,3 | 0,66 | 1 |
| D_3 | 0,01 | 0,1 | 0,06 | 0 | 0,06 | 0,23 | 0,05 | 0,03 | 0,01 | 0,03 | 0,09 | 0,22 | 0,49 | 3 |
| D_4 | 0,07 | 0 | 0,07 | 0,02 | 0,15 | 0,31 | 0 | 0,13 | 0 | 0,01 | 0 | 0,14 | 0,32 | 4 |

Źródło: opracowanie własne

5. Wnioski

W artykule zaproponowano wykorzystanie modelu skierowanych liczb rozmytych do podejmowania decyzji (rankingowania wariantów) metodą TOPSIS. Proponowane podejście skutecznie radzi sobie w sytuacjach niepewnych i nieprecyzyjnych informacji poprzez rozmywanie ocen dla wariantów. Ponadto metoda nie wymaga dużego zaangażowania ekspertów, gdyż rozmyte oceny są tworzone na zasadzie rozszerzania przedziałów ocen do rozmytych przedziałów niepewności, a nie jak to jest w oryginalnej metodzie na podstawie dodatkowych ocen lingwistycznych przyznanych przez eksperta. Oceny w postaci skierowanych liczb rozmytych pozwalają na rozróżnienie typu kryteriów podczas analizy wariantów. Przedstawiony przykład wskazuje, iż metoda może być skutecznie wykorzystywana do oceny i wyboru dostawców. Podejście to jest na tyle elastyczne, że może mieć zastosowanie w różnych gałęziach przemysłu podczas analizy współpracy w kontrahentami.

Praca wykonana w ramach realizacji pracy statutowej S/WI/2/2011.

Literatura

1. Abdullah L., Adawiyah C.W.R.: Simple additive weighting methods of multi criteria decision making and applications: a decade review. *International Journal of Information Processing and Management (IJIPM)*, Vol. 5, No. 1, February 2014, pp. 39–49.
2. Pohekar S. D., Ramachandran M.: Application of multi-criteria decision making to sustainable energy planning—A review. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, vol. 8, no. 4, 2004, pp. 365–381.
3. Gupta S., Gupta A.: Fuzzy multi criteria decision making approach for vendor evaluation in a supply chain. *Interscience Management Review (IMR)*, Vol. 2, Issue 3, 2012, pp. 10–16.
4. Kosiński W., Prokopowicz P., Ślęzak D.: Ordered fuzzy numbers. *Bulletin of the Polish Academy of Sciences Mathematic*, vol. 52, no. 3, 2003, pp. 327–339.
5. Hwang, C. L., Yoon, K.: *Multiple Attribute Decision Making: Methods and Application*. Springer, New York, 1981.
6. Zadeh, L. A.: Fuzzy sets. *Information and Control*, vol. 8, no. 3, 1965, pp. 338–353.
7. Chen C.T.: Extension of the TOPSIS for group decision-making under fuzzy environment. *Fuzzy Sets and Systems*, no.114, 2000, pp. 1–9.
8. Boran F. E., Genc S., Kurt M., Akay D.: A multi-criteria intuitionistic fuzzy group decision making for supplier selection with TOPSIS method. *Expert Systems with Applications: An International Journal archive*, Vol. 36 Issue 8, October, 2009, pp. 11363-11368.
9. Taylan O., Bafail A., Abdulaal R.M.S., Kabli M.R: Construction projects selection and risk assessment by fuzzy AHP and fuzzy TOPSIS methodologies. *Applied Soft Computing*, 17, 2014, pp. 105–116.
10. Kabir G., Hasin M. A. A.: Comparative analysis of topsis and fuzzy topsis for the evaluation of travel website service quality. *International Journal for Quality*, Vol. 6, No. 3, 2013, pp. 169–185.
11. Ertuğrul I., Karakaşoğlu N.: Comparison of fuzzy AHP and fuzzy TOPSIS methods for facility location selection. *Int J Adv Manuf Technol*, 39, 2008, pp. 783–795.
12. Tansel İç Y.: Development of a credit limit allocation model for banks using an integrated Fuzzy TOPSIS and linear programming. *Expert Systems with Applications: An International Journal*, Vol. 39, Issue 5, April, 2012, pp. 5309–5316.
13. Sun C. C.: A performance evaluation model by integrating fuzzy AHP and fuzzy TOPSIS methods. *Expert Systems with Applications*, vol. 37, no. 12, 2010, pp. 7745–7754.
14. Łuczak A., Wysocki F.: Porządkowanie liniowe obiektów z wykorzystaniem rozmytych metod AHP i TOPSIS. *Przegląd Statystyczny*, R. LVIII, Zeszyt 1-2, 2011, str. 3–23.
15. Wang J.-W., Cheng C.-H., Huang K.-C.: Fuzzy hierarchical TOPSIS for supplier selection. *Journal Applied Soft Computing*, Vol. 9, Issue 1, January, 2009, pp. 377–386.
16. Kosiński W., Prokopowicz P., Ślęzak D.: Drawback of fuzzy arithmetics – new intuitions and propositions. In T. Burczyński, W. Cholewa, W. Moczulski ed. *Methods of Artificial Intelligence*, Gliwice, 2002, pp. 231–237.
17. Kosiński W., Prokopowicz P., Ślęzak D.: On algebraic operations on fuzzy reals. In L. Rutkowski, J. Kasprzyk ed. *Advances in Soft Computing, Proceedings of the Sixth*

- International Conference on Neural Networks and Soft Computing, Zakopane, 2002, pp. 54–61.
18. Kosiński W., Prokopowicz P.: Algebra liczb rozmytych. *Matematyka stosowana*, Warszawa: Pismo Polskiego Towarzystwa Matematycznego, vol. 5, 46, 2004, str. 37–63.
 19. Kacprzak D.: Ewolucja liczb rozmytych. VII Konferencja naukowo-praktyczna: *Energia w nauce i technice*, 2008, str. 783–796.
 20. Kacprzak D.: Skierowane liczby rozmyte w modelowaniu ekonomicznych. *Optimum – Studia Ekonomiczne*, nr 3, 2010, str. 263–281.
 21. Kosiński W.K., Kosiński W., Kościński K.: Ordered Fuzzy Numbers Approach to an Investment Project Evaluation. *Management and Production Engineering Review*, Vol. 4, No 2, June 2013, pp. 50–62.
 22. Dickson G.W.: An Analysis of vendor selection systems and decisions. *Journal of Purchasing*, 2, 1966, pp. 5–17.
 23. Agarwal P., Sahai M., Mishra V., Bag M., Singh V.: A review of multi-criteria decision making techniques for supplier evaluation and selection. *International Journal of Industrial Engineering Computations*, vol. 2, no. 4, 2011, pp. 801–810.
 24. Ho W., Xu X., Dey P. K.: Multi-criteria decision making approaches for supplier evaluation and selection: A literature review. *European Journal of Operational Research*, vol. 202, no. 1, 2010, pp.16–24.

Dr inż. Katarzyna RUDNIK
Instytut Innowacyjności Procesów i Produktów
Politechnika Opolska
45-370 Opole, ul. Ozimska 75
Tel./fax.: (+48 77) 449 88 45
e-mail: k.rudnik@po.opole.pl

Dr Dariusz KACPRZAK
Wydział Informatyki
Politechnika Białostocka
15-351 Białystok, ul. Wiejska 45A
Tel./fax.: (+48 85) 746 90 75
e-mail: d.kacprzak@pb.edu.pl