

METODA AHP I ROZMYTA SAW OPARTA NA SKIEROWANYCH LICZBACH ROZMYTYCH W PROCESIE WYBORU TRASY DOSTAWY

Dariusz KACPRZAK, Katarzyna RUDNIK

Streszczenie: Artykuł przedstawia propozycję zastosowania wieloatrybutowych metod podejmowania decyzji (MADM) w procesie wyboru trasy dostawy. Koncepcja łączy metodę AHP, która jest wykorzystana w celu określenia ważności kryteriów oraz metodę rozmytą SAW pozwalającą na ocenę trasy. Metoda rozmyta SAW jest nowym podejściem, gdyż wykorzystuje skierowane liczby rozmyte do reprezentacji ocen wariantów. W celu weryfikacji podejścia przedstawiono przykład rankingu i wyboru najlepszej trasy dostawy z uwzględnieniem proponowanego zestawu kryteriów i podkryteriów. Koncepcja stanowi skuteczne i systematyczne narzędzie wspomagania decyzji.

Słowa kluczowe: skierowane liczby rozmyte (OFN), metoda AHP, metoda SAW, wybór trasy dostawy.

1. Wprowadzenie

W ramach planowania w łańcuchu dostaw jednym z wielu zadań jest planowanie tras przewozów, wielkości dostaw oraz wykorzystania środków transportu. Celem planowania tras jest możliwie najlepsze wykorzystanie potencjału środków transportu, przy jak najkrótszej drodze i w jak najkrótszym czasie przewozu, osiągając przy tym najniższe koszty jednostkowe. Problem wyboru trasy dostawy (problem wyboru trasy pojazdów, problem marszrutyzacji, ang. *Vehicle Routing Problems*) jest zadaniem analizowanym już od przeszło pół wieku. W tym czasie rozważano różne odmiany tego zagadnienia, jak również różne wersje rozwiązań. Początkowo uwagę badaczy przyciągnął tzw. problem komiwojażera (ang. *Traveling Salesman Problem*), który polegał na wyborze optymalnej trasy z uwzględnieniem optymalizacji sieci. Trasa miała rozpocząć się od założonej miejscowości, następnie zapewnić odwiedzinę każdego z wybranych punktów pośrednich, oraz skończyć się na miejscowości, z której rozpoczęto podróż. Celem metody jest wybór trasy o najniższym koszcie przejazdu. Problem komiwojażera najczęściej rozwiązywany jest za pomocą modeli matematycznych programowania liniowego, w których warunki ograniczające oraz funkcja celu mają postać liniową. W miarę potrzeb wzrastało zainteresowanie problemem komiwojażera, jak również zaczęto rozważać zagadnienia uwzględniające dodatkowe warunki zadania.

Rozważane w artykule zagadnienie jest uproszczonym problemem wyboru tras pojazdów, gdyż nie uwzględnia etapu generowania tras a jedynie wybór trasy ze zbioru tras proponowanych. Z uwagi na szeroki wachlarz możliwych uwarunkowań problemu proponuje się podejście wielokryterialne przy ocenie danej trasy z uwzględnieniem wag (ważności, priorytetów) danych kryteriów oceny. Metoda pozwala na utworzenie rankingu proponowanych tras oraz wyboru trasy najkorzystniejszej z jednoczesnym uwzględnieniem wielu kryteriów. W tym celu wykorzystuje się wieloatrybutowe metody podejmowania

decyzji (MADM, ang. *Multi-Attribute Decision Making*), które są stosowane do oceny ważności kryteriów a także do rozwiązania problemu na podstawie skończonej liczby alternatyw w oparciu o podejście wielokryterialne. Metody MADM określają procedury przetwarzania informacji dotyczącej wartości (oceny) wariantów względem kryteriów, w celu uszeregowania rozwiązań i wyboru najlepszego. W ramach powyższego podejścia wyróżniamy szeroki zakres metod, wśród których można wymienić: metodę SAW (Simple Additive Weighting), metody rankingujące ELECTRE (ELimination and Choice Expressing the REality) i PROMETHEE (Preference Ranking Organization Method for Enrichment Evaluation), metody oparte na mierze odległości względem ideału/antyideału VIKOR (VIsekriterijumska optimizacija i KOmpromisno Resenje, ang. Multicriteria Optimization and Compromise Solution) i TOPSIS (ang. Technique for Order Preference by Similarity to Ideal Solution), metody porównań parami AHP (ang. Analytic Hierarchy Process), ANP (ang. Analytic Network Process) i MACBETH (ang. Measuring Attractiveness by a Categorical Based Evaluation Technique) itp.. W przypadku analizy w warunkach niepewności, dla niestrukturalnych problemów lub odległego czasowo wnioskowania, najczęściej wykorzystuje się metody Fuzzy Multi-Attribute Decision Making (FMADM). Metody te w odróżnieniu od wcześniej wspomnianych wykorzystują wartości rozmyte zamiast numerycznych (ostrzych) do określenia wag dla każdego kryterium lub/oraz oceny alternatyw względem analizowanych kryteriów. Wszystkie wymienione powyżej metody mają swoje wersje rozmyte [1]. Literatura udowadnia [2, 3], że połączenie jednocześnie kilku MADM (FMADM) metod stanowi bardziej precyzyjne i skuteczne narzędzie podejmowania decyzji.

W artykule, w celu wyboru najkorzystniejszej trasy dostawy, proponuje się zastosowanie dwóch metod: klasycznej metody AHP [4, 5] oraz metody FSAW opartej o koncepcję skierowanych liczb rozmytych (Ordered Fuzzy Numbers, OFN) [6, 7]. Metoda AHP, jako metoda porównań parami, stanowi skuteczne narzędzie służące do określenia numerycznych wag stosowanych kryteriów oceny trasy. Aby docelowo ocenić trasę, zaproponowano podejście hybrydowe, które łączy w sobie klasyczną metodę SAW [8] oraz koncepcję skierowanych liczb rozmytych. Podejście SAW pozwala na proste i intuicyjne modelowanie preferencji decydenta za pomocą addytywnej funkcji liniowej [9], natomiast wykorzystanie dodatkowo skierowanych liczb rozmytych pozwala na uwzględnienie niepewności w przyznanych ocenach. Analizując kryteria oceny tras można wyróżnić zarówno destymulany (kryteria typu "strata") np. długość trasy, czas przejazdu, koszt opłat drogowych itp., jak i stymulany (kryteria typu „zysk”) np. jakość nawierzchni, standard parkingów itp. Zaletą stosowanego podejścia jest możliwość rozróżniania typów kryteriów poprzez skierowanie liczb rozmytych.

Praca składa się z sześciu części. W drugiej przybliżono podstawowe informacje na temat modelu skierowanych liczb rozmytych, podstawowych działań arytmetycznych na tych liczbach oraz metod defuzyfikacji. W części trzeciej zaprezentowano metodę AHP, zastosowaną do wyznaczenia wag kryteriów oceny tras. Kolejno zaproponowano metodę FSAW wykorzystującą skierowane liczby rozmyte i służącą do wyznaczenia rankingu tras. Metody zweryfikowano na podstawie przykładu numerycznego. Ostatnią część pracy stanowi podsumowanie.

2. Skierowane liczby rozmyte

W 2002 roku prof. Witold Kosiński wraz z dwoma współpracownikami Piotrem Prokopowiczem oraz Dominikiem Ślęzakim w serii prac [6, 7, 10, 11] zaproponowali

model liczb rozmytych nazwany skierowanymi liczbami rozmytymi (Ordered Fuzzy Numbers – OFN), który jest rozszerzeniem modelu wypukłych liczb rozmytych (Convex Fuzzy Numbers – CFN).

Definicja 1. [11]. Skierowaną liczbą rozmytą A nazywamy uporządkowaną parę (f_A, g_A) funkcji ciągłych, takich że $f_A, g_A: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ są ciągłe.

Zbiór skierowanych liczb rozmytych oznaczamy przez \mathfrak{R} . Elementy skierowanej liczby rozmytej A nazywamy odpowiednio f_A – część wznosząca (UP) i g_A – część opadająca (DOWN). Aby zachować zgodność z modelem CFN przez y oznaczymy zmienną niezależną funkcji f_A i g_A , a przez x ich wartości (zmienną zależną) (Rys. 1a). Z ciągłości funkcji f_A i g_A wynika, że ich obrazy są ograniczonymi przedziałami oznaczanymi odpowiednio UP_A i $DOWN_A$ (rys. 1a), których granicę oznaczamy następująco: $UP_A = [f_A(0), f_A(1)]$ i $DOWN_A = [g_A(1), g_A(0)]$. Uwzględniając warunek normalności liczb rozmytych na zbiorze $[f_A(1), g_A(1)] = CONST_A$ (który może być jednoelementowy) dołączamy funkcję stałą równą 1. Wówczas przedział $[f_A(0), g_A(0)]$ jest nośnikiem skierowanej liczby rozmytej A , natomiast zbiór $[f_A(1), g_A(1)]$ jest jej jądrem.

Definicja 1 skierowanej liczby rozmytej A nie wymaga, aby funkcje f_A i g_A były odwracalne, a jedynie ciągłe. Jednak jeżeli dodatkowo założymy, że [11]: (*) funkcja f_A jest rosnąca a funkcja g_A jest malejąca oraz że (**) $f_A(y) \leq g_A(y)$ dla $\forall y \in [0,1]$, możemy określić funkcję przynależności μ_A skierowanej liczby rozmytej A następująco (rys. 1b) [12, 13]:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} f_A^{-1}(x) & \text{gdy } x \in UP_A \\ 1 & \text{gdy } x \in CONST_A \\ g_A^{-1}(x) & \text{gdy } x \in DOWN_A \end{cases} \quad (1)$$

Rysunek 1c pokazuje skierowaną liczbę rozmytą A wyposażoną w strzałkę – skierowanie – która obrazuje porządek odwróconych funkcji f_A i g_A , czyli orientację skierowanej liczby rozmytej A . Para funkcji ciągłych (g_A, f_A) określa inną skierowaną liczbę rozmytą niż para (f_A, g_A) . Graficznie widoczne jest to w skierowaniu (rys. 2). Pozwala ono podzielić zbiór \mathfrak{R} na dwa podzbiory: skierowane liczby rozmyte o skierowaniu dodatnim (pozytywnym), jeżeli skierowanie liczb jest zgodne z osią ox (rys. 2a) oraz skierowane liczby rozmyte o skierowaniu ujemnym (negatywnym) w przeciwnym przypadku (rys. 2b).

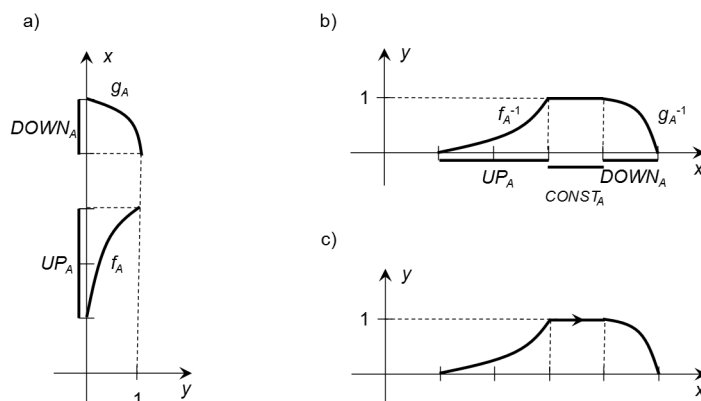
Niech $A = (f_A, g_A)$, $B = (f_B, g_B)$ i $C = (f_C, g_C)$ będą skierowanymi liczbami rozmytymi. Działania arytmetyczne (dodawanie ($C = A + B$), odejmowanie ($C = A - B$), mnożenie ($C = A \cdot B$) i dzielenie ($C = A/B$) na skierowanych liczbach rozmytych A i B w modelu \mathfrak{R} są określone następująco:

$$\forall y \in [0,1] [f_C(y) = f_A(y) * f_B(y) \text{ i } g_C(y) = g_A(y) * g_B(y)] \quad (2)$$

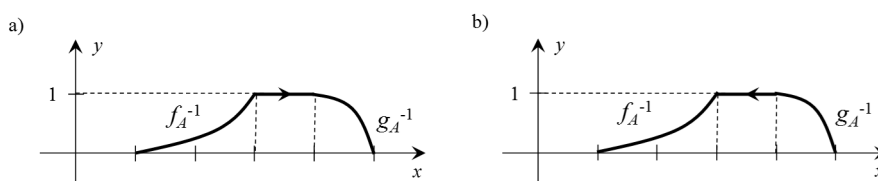
gdzie $*$ $\in \{+, -, \cdot, /$ oraz A/B jest określone gdy $\forall y \in [0,1] |f_B(y)| > 0$ i $|g_B(y)| > 0$.

Liczy rzeczywiste są szczególnym przypadkiem skierowanych liczb rozmytych. W modelu \mathfrak{R} są one utożsamiane z parą funkcji stałych. Niech $r \in \mathbb{R}$ oraz niech r' będzie funkcją stałą, tzn. $r'(y) = r$ dla $y \in [0,1]$. Wówczas $r^* = (r', r')$ jest skierowaną liczbą rozmytą, która w \mathfrak{R} reprezentuje liczbę rzeczywistą r . Pozwala to określić mnożenie liczby rzeczywistej r przez skierowaną liczbę rozmytą $A = (f_A, g_A)$ następująco:

$$\forall y \in [0,1] [r \cdot A = (r \cdot f_A(y), r \cdot g_A(y))]. \quad (3)$$



Rys. 1. a) Skierowana liczba rozmyta A , b) Skierowana liczba rozmyta A przedstawiona w sposób nawiązujący do CFN, c) Strzałka przedstawiająca porządek odwróconych funkcji i orientację skierowanej liczby rozmytej A [6]

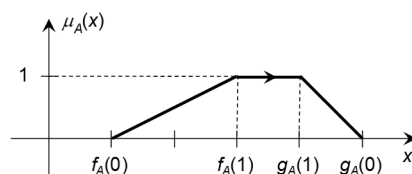


Rys. 2. a) Skierowana liczba rozmyta (f_A, g_A) o dodatnim skierowaniu, b) Skierowana liczba rozmyta (g_A, f_A) o ujemnym skierowaniu [14]

W określeniu funkcji przynależności $\mu_A(x)$ skierowanej liczby rozmytej A występują cztery liczby rzeczywiste $f_A(0)$, $f_A(1)$, $g_A(1)$ i $g_A(0)$. Jeżeli funkcje f_A i g_A są liniowe wówczas te cztery liczby jednoznacznie opisują skierowaną liczbę rozmytą A , którą możemy zapisać następująco (rys. 3):

$$A = (f_A(0); f_A(1); g_A(1); g_A(0)). \quad (4)$$

W przypadku gdy $f_A(1) < g_A(1)$ to liczby OFN będziemy nazywać trapezowymi skierowanymi liczbami rozmytymi, jeżeli $f_A(1) = g_A(1)$ to zdefiniowana będzie trójkątna skierowana liczba rozmyta.



Rys. 3. Przykładowa OFN wraz z charakterystycznymi punktami [13]

Powyższa reprezentacja OFN umożliwia szybkie wykonywanie działań arytmetycznych na skierowanych liczbach rozmytych. Niech $A = (f_A(0); f_A(1); g_A(1); g_A(0))$ i $B = (f_B(0); f_B(1); g_B(1); g_B(0))$ będą dwoma skierowanymi liczbami rozmytymi oraz $r \in \mathbb{R}$. Dodawanie liczb A i B oraz mnożenie liczby A przez liczbę r wyglądają następująco:

$$A + B = (f_A(0) + f_B(0); f_A(1) + f_B(1); g_A(1) + g_B(1); g_A(0) + g_B(0)), \quad (5)$$

$$r \cdot A = (r \cdot f_A(0); r \cdot f_A(1); r \cdot g_A(1); r \cdot g_A(0)). \quad (6)$$

W zastosowaniach liczb rozmytych np. w sterowaniu rozmytym, rozmytych systemach wnioskujących czy w rozmytych metodach wielokryterialnych (np. w FSAW) ważną rolę odgrywa operacja defuzyfikacji.

Definicja 2. [15]. Odwzorowanie ϕ z przestrzeni skierowanych liczb rozmytych \mathfrak{R} w \mathbb{R} nazywamy operacją defuzyfikacji (defuzyfikatorem), jeżeli dla $A \in \mathfrak{R}$ oraz $r \in \mathbb{R}$ spełnia warunki:

- $\phi(r^*) = r$,
- $\phi(A + r^*) = \phi(A) + r$,
- $\phi(r^* \cdot A) = r \cdot \phi(A)$.

Niech $A = (f_A, g_A) = (f_A(0); f_A(1); g_A(1); g_A(0))$ będzie trapezową skierowaną liczbą rozmytą. Do często wykorzystywanych metod defuzyfikacji OFN możemy zaliczyć [15]:

- pierwsze maksimum (first of maximum, FOM) – ϕ_{FOM}

$$\phi_{FOM}(A) = f_A(1), \quad (7)$$

- ostatnie maksimum (last of maximum, LOM) – ϕ_{LOM}

$$\phi_{LOM}(A) = g_A(1), \quad (8)$$

- środek maksimum (middle of maximum, MOM) – ϕ_{MOM}

$$\phi_{MOM}(f_A, g_A) = \frac{1}{2}(f_A(1) + g_A(1)), \quad (9)$$

- losowe maksimum (random choice of maximum, RCOM) – ϕ_{RCOM}

$$\phi_{RCOM}(A) = \lambda f_A(1) + (1 - \lambda)g_A(1), \lambda \in [0,1], \quad (10)$$

- środek ciężkości (center of gravity, COG) – ϕ_{COG}

$$\begin{aligned} \phi_{COG}(f_A, g_A) &= \frac{\int_0^1 \frac{f_A(s) + g_A(s)}{2} (f_A(s) - g_A(s)) ds}{\int_0^1 (f_A(s) - g_A(s)) ds} = \\ &= \frac{f_A^2(1) + f_A(1)f_A(0) + f_A^2(0) - g_A^2(1) - g_A(1)g_A(0) - g_A^2(0)}{3(f_A(0) + f_A(1) - g_A(0) - g_A(1))}, \end{aligned} \quad (11)$$

- średnia geometryczna (geometrical mean, GM) – ϕ_{GM}

$$\phi_{GM}(f_A, g_A) = \frac{g_A(1)g_A(0) - f_A(0)f_A(1)}{g_A(1) + g_A(0) - f_A(0) - f_A(1)}. \quad (12)$$

Dodatkowo zauważmy, że defuzyfikatory FOM, LOM i RCOM (jeżeli $\lambda \neq \frac{1}{2}$) są wrażliwe na orientację defuzyfikowanej skierowanej liczby rozmytej oraz próbując defuzyfikacji liczby rzeczywistej za pomocą metod COG i GM korzystamy z warunku $\phi(r^*) = r$ w definicji 2.

3. Określenie wag kryteriów wyboru trasy za pomocą metody AHP

Metoda AHP, opracowana przez Saaty'ego [4] stanowi strategię określania preferencji za pomocą porównywania wariantów decyzyjnych, a w tym przypadku kryteriów oceny tras dostaw. Uwzględnienie preferencji decydynta (oceniającego) czyni tą metodę subiektywną, jednakże jest to zjawisko naturalne z uwagi, iż doświadczenie decydynta jest w przypadku wartościowania wag kryteriów głównym źródłem wiedzy.

Określenie wag kryteriów wyboru trasy z wykorzystaniem metody AHP odbywa się w 4 etapach, które zostały przedstawione poniżej.

ETAP 1. Opracowanie modelu kryteriów ocen trasy dostawy. W przypadku złożoności problemu dekompozycja kryteriów i budowa hierarchicznego modelu kryteriów. Model hierarchiczny stanowi zestaw kryteriów oceny trasy dostawy (kryteriów głównych) wraz z podrzędnymi podkryteriami (kryteriami szczegółowymi).

ETAP 2. Ocena kryteriów poprzez porównanie ich parami. Podczas porównania stosuje się względną skalę punktową, która w klasycznej metodzie AHP kształtuje się w zakresie od 1 do 9 (tab. 1). Tabela 1 zawiera punktację dla przypadku, gdy kryterium A jest równoważne lub posiada przewagę nad kryterium B . W przypadku, gdy kryterium B jest bardziej preferowane stosuje się wartości odwrotne (np. kryterium B jest słabo preferowane względem kryterium A – wartość $1/3$, kryterium B jest ekstremalnie preferowane – wartość $1/9$).

Tab. 1. Skala punktowa dla ocen ważności kryteriów przy porównywaniu kryteriów parami

| Ocena punktowa a_{AB} | Znaczenie | Objaśnienie |
|-------------------------|-----------------------|---|
| 1 | Jednakowa istotność | Kryterium A jest równoważne z kryterium B |
| 3 | Niewielka przewaga | Kryterium A jest słabo preferowane względem kryterium B |
| 5 | Silna przewaga | Kryterium A jest silnie preferowane względem kryterium B |
| 7 | Bardzo silna przewaga | Kryterium A jest bardzo silnie preferowane względem kryterium B |
| 9 | Ekstremalna przewaga | Kryterium A jest ekstremalnie preferowane względem kryterium B |
| 2, 4, 6, 8 | | Wartości pośrednie |

Na podstawie tak określonych ocen ważności kryteriów, na każdym poziomie hierarchii kryteriów (poziomie kryteriów głównych i kryteriów szczegółowych dotyczących każdego kryterium głównego osobno) porównujemy kryteria każdy z każdym i tworzymy kwadratowe macierze porównań (macierze oceny ważności kryteriów) (tab. 2). Macierz porównań charakteryzuje się spójnością parami, co oznacza, iż:

- każdy element a_{ii} na przekątnej macierzy jest równy 1 (ocena względem samego siebie jest równoważna),

- wartość oceny ważności kryterium i względem kryterium j jest odwrotnością wartości oceny ważności kryterium j względem i ($a_{ij} * a_{ji} = 1, a_{ji} \neq 0$).

Tab. 2. Macierz porównań ważności n kryteriów

| | | Nr kryterium | | | |
|---------------------|----------|---------------------|------------|-----|----------|
| | | 1 | 2 | ... | n |
| Nr kryterium | 1 | 1 | a_{12} | ... | a_{1n} |
| | 2 | $1/a_{12}$ | 1 | ... | a_{2n} |
| | ... | ... | ... | ... | ... |
| | n | $1/a_{1n}$ | $1/a_{2n}$ | ... | 1 |

ETAP 3. Tworzenie wektora wag kryteriów. Wektor wag kryteriów stanowi znormalizowany wektor własny macierzy porównań, spełniający zależność $\sum_{i=1}^n w_i = 1$. Aby wyznaczyć wagi kryteriów postępujemy następująco. Na podstawie macierzy porównań parami $A = (a_{ij})$ tworzymy macierz znormalizowaną $\bar{A} = (\bar{a}_{ij})$, gdzie

$$\bar{a}_{ij} = \frac{a_{ij}}{\sum_{i=1}^n a_{ij}}. \quad (13)$$

Dla znormalizowanej macierzy \bar{A} obliczamy sumy wierszowe (sumy elementów stojących w wierszach) $\bar{A}_i = \sum_{j=1}^n \bar{a}_{ij}$, które stanowią podstawę obliczania wag kryteriów:

$$w_i = \frac{\bar{A}_i}{\sum_{i=1}^n \bar{A}_i} \quad (i = 1, \dots, n). \quad (14)$$

Wektory wag każdej macierzy porównań stanowią lokalne wektory wag porównywanych kryteriów. W przypadku hierarchii kryteriów, wartość globalną wagi dla kryterium szczegółowego uzyskuje się na podstawie iloczynu wartości lokalnej wagi kryterium szczegółowego i odpowiadającej jej wartości wagi kryterium głównego, do którego należy kryterium szczegółowe.

ETAP 4. Badanie poprawności porównań kryteriów – spójności macierzy porównań. Według Saaty'ego w celu zbadania spójności macierzy porównań (tab. 2) wyliczane są dwa współczynniki:

- indeks zgodności CI (Consistency Index) dla macierzy porównań, wynikający z zależności:

$$CI = \frac{\lambda_{max} - n}{n - 1}, \quad (15)$$

gdzie λ_{max} stanowi największą wartość własną macierzy, n – liczbę kryteriów. Wartość elementu λ_{max} z wystarczającą w praktyce dokładnością można wyznaczyć następująco [16]:

$$\lambda_{max} \approx \sum_{j=1}^n [w_j \sum_{i=1}^n a_{ij}], \quad (16)$$

gdzie w_i stanowi wagę kryterium wyznaczoną według zależności (14), a_{ij} – element macierzy porównań A .

- współczynnik zgodności CR (Consistency Ratio) jako:

$$CR = \frac{CI}{RI} \quad (17)$$

gdzie RI oznacza index losowy (Random Index), stanowiący wartość średnią indeksu CI dla dużej liczby losowo wygenerowanych macierzy porównań (tab. 3).
Oceny ważności kryteriów w danej macierzy porównań możemy uznać za spójne, wówczas gdy wartość współczynnika zgodności CR nie przekracza 0.1.

Tab. 3. Poszczególne wartości dla współczynnika RI [17]

| | | | | | | | | | | | | |
|-----------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| n | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| RI | 0,00 | 0,00 | 0,52 | 0,89 | 1,11 | 1,25 | 1,35 | 1,40 | 1,45 | 1,49 | 1,52 | 1,54 |

4. Rozmyta metoda SAW oparta na skierowanych liczbach rozmytych

Metoda SAW (Simple Additive Weighting) jest jedną z najprostszych oraz najczęściej stosowanych metod wspomagających rozwiązywanie wieloatrybutowych problemów decyzyjnych (MADM). W pracy wykorzystamy ją do wyboru optymalnej trasy dostawy w ramach przyjętych kryteriów. Punktem wyjścia jest tu macierz decyzyjna zawierająca oceny tras względem przyjętych kryteriów – tab. 4. Elementy x_{ij}^* ($i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$) są wyrażone za pomocą liczb rzeczywistych, które poddamy rozmyciu za pomocą skierowanych liczb rozmytych.

Tab. 4. Opis problemu decyzyjnego w postaci macierzy decyzyjnej

| Trasy dostawy | Kryteria | | | |
|---------------|------------|------------|-----|------------|
| | K_1 | K_2 | ... | K_n |
| T_1 | x_{11}^* | x_{12}^* | ... | x_{1n}^* |
| T_2 | x_{21}^* | x_{22}^* | ... | x_{2n}^* |
| ... | ... | ... | ... | ... |
| T_m | x_{m1}^* | x_{m2}^* | ... | x_{mn}^* |
| Ograniczenie | OK_1 | OK_2 | ... | OK_n |

W stosunku do rozważanych tras zastosujemy pewne warunki ograniczające. W przypadku stymulanty jest to wielkość minimalna oceny trasy względem kryterium, którą akceptujemy. Ocena niższa niż ograniczenie powoduje usunięcie danej trasy ze zbioru rozważanych tras. W przypadku destymulanty ograniczenie informuje o maksymalnej wartości oceny jaką przyjmujemy. Przekroczenie jej skutkuje opuszczeniem danej trasy w dalszych etapach analizy.

Utworzenie rankingu rozważanych tras i wskazanie trasy optymalnej względem przyjętych kryteriów składa się z czterech etapów.

ETAP 1. Tworzymy rozmytą macierz decyzyjną X :

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{bmatrix} \quad (18)$$

gdzie $x_{ij} = (f_{ij}(0); f_{ij}(1); g_{ij}(1); g_{ij}(0))$ ($i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$) są skierowanymi liczbami rozmytymi. Powstają one w wyniku przekształcenia ostrych ocen x_{ij}^* do wartości estymowanych lub założonych przedziałów niepewności oceny (przez rozszerzenie nośnika i jądra). Skierowanie liczby x_{ij} wykorzystamy do oznaczenia typu kryterium: dla stymulanty jest ono dodatnie, natomiast dla destymulanty jest ujemne (zob. rys. 2).

ETAP 2. Normalizujemy rozmytą macierz decyzyjną X otrzymując macierz Z [18]:

$$Z = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} & \dots & z_{1n} \\ z_{21} & z_{22} & \dots & z_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{m1} & z_{m2} & \dots & z_{mn} \end{bmatrix}, \quad (19)$$

gdzie

$$z_{ij} = \begin{cases} \left(\frac{f_{ij}(0)}{\max_i g_{ij}(0)}; \frac{f_{ij}(1)}{\max_i g_{ij}(0)}; \frac{g_{ij}(1)}{\max_i g_{ij}(0)}; \frac{g_{ij}(0)}{\max_i g_{ij}(0)} \right) & \text{gdy } K_j - \text{stymulanta} \\ \left(\frac{\min_i g_{ij}(0)}{f_{ij}(0)}; \frac{\min_i g_{ij}(0)}{f_{ij}(1)}; \frac{\min_i g_{ij}(0)}{g_{ij}(1)}; \frac{\min_i g_{ij}(0)}{g_{ij}(0)} \right) & \text{gdy } K_j - \text{destymulanta} \end{cases}. \quad (20)$$

Zauważmy, że w wyniku normalizacji (20) skierowanie dla destymulanty zmienia kierunek, powodując, że wszystkie elementy w macierzy Z (19) mają skierowanie dodatnie.

ETAP 3. Wyznaczamy wartości funkcji agregującej każdej trasy jako kombinacja liniowa elementów znormalizowanej macierzy decyzyjnej Z oraz elementów wektora wag kryteriów, otrzymanych w etapie 3 metody AHP:

$$FS(T_i) = \sum_{j=1}^n z_{ij} \cdot w_j \quad \text{dla każdego } i = 1, \dots, m. \quad (21)$$

ETAP 4. Uzyskane zgodnie z (21) skierowane liczby rozmyte $FS(T_i)$ poddajemy operacji defuzyfikacji przy użyciu jednej z formuł (7)-(12), a uzyskane liczby rzeczywiste $\phi(FS(T_i))$ porządkujemy liniowo. Wyższe wartości $\phi(FS(T_i))$ wskazują, że wariant decyzyjny T_i zajmuje wyższą pozycję w rankingu (jest bardziej preferowany).

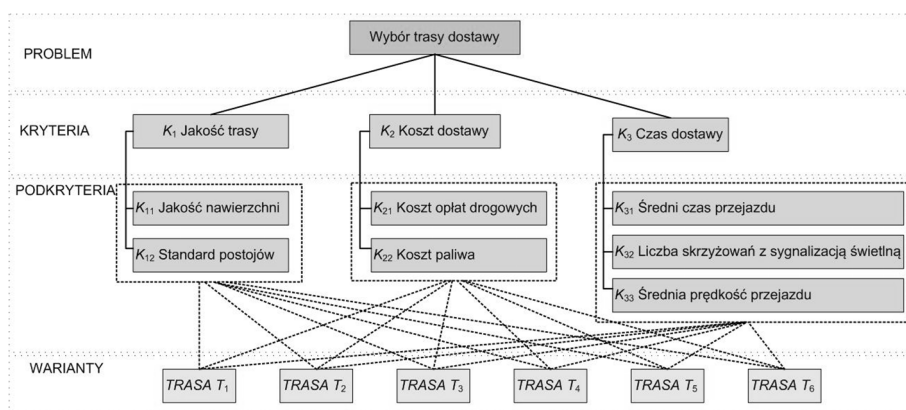
5. Przykład użycia proponowanej metody dla problemu wyboru optymalnej trasy w łańcuchu dostaw

Przedstawione we wcześniejszych częściach narzędzia, czyli skierowane liczby rozmyte oraz metody AHP i FSAW, wykorzystamy w zagadnieniu wyboru trasy między dwoma zakładami/ośrodkami w łańcuchu dostaw. Znane są lokalizacje dostawcy i odbiorcy oraz siatka połączeń drogowych między nimi. Znane są więc odległości i czasy potrzebne na przejazd pomiędzy poszczególnymi punktami, oraz charakterystyka dróg. Pozwala to wyznaczyć zbiór potencjalnych tras dostaw. Rysunek 5 przedstawia strukturę analizowanego problemu wyboru trasy.

W tabeli 5 zestawiono brane pod uwagę kryteria i podkryteria wyboru trasy. Oznaczenia (S) i (D) przy symbolach kryteriów informują o charakterze kryterium: (S) oznacza stymulanty (czyli kryterium typu „zysk”, im wyższe wartości ocen, tym lepiej), natomiast (D) destymulanty (czyli kryterium typu „strata”, im niższe wartości ocen, tym lepiej). Na

podstawie podkryteriów K_{11} , K_{12} , K_{21} , K_{22} , K_{31} , K_{32} i K_{33} oraz macierzy decyzyjnej (tab. 6) należy dokonać wyboru jednej z analizowanych tras przejazdu T_1 , T_2 , T_3 , T_4 , T_5 lub T_6 .

W celu określenia wag podkryteriów K_{11} , K_{12} , K_{21} , K_{22} , K_{31} , K_{32} i K_{33} zastosujemy metodę AHP przedstawioną w części 3. Zaczniemy od określenia wag kryteriów głównych K_1 , K_2 i K_3 . Tabela 7 zawiera macierz porównań parami kryteriów głównych zgodnie z ocenami punktowymi zawartymi w tabeli 1. Dalej jest ona normalizowana zgodnie z formułą (13) (tab. 8) oraz na jej podstawie (wzór (14)) wyznaczane są znormalizowane wagi kryteriów głównych (tab. 9).



Rys. 5. Struktura analizowanego problemu wyboru trasy

Tab. 5. Przyjęte kryteria i podkryteria oceny rozpatrywanych tras

| Kryteria | | Podkryteria | |
|----------|---------------|--------------|--|
| K_1 | Jakość trasy | K_{11} (S) | Jakość nawierzchni (skala 0,...,10, 0-słaba, 10-doskonała) |
| | | K_{12} (S) | Standard postojów (skala 0,...,10, 0-słaba, 10-doskonała) |
| K_2 | Koszt dostawy | K_{21} (D) | Koszt opłat drogowych (tys. zł) |
| | | K_{22} (D) | Koszt paliwa (tys. zł) |
| K_3 | Czas dostawy | K_{31} (D) | Średni czas przejazdu (godz.) |
| | | K_{32} (D) | Liczba skrzyżowań ze światłami (N) |
| | | K_{33} (S) | Średnia prędkość przejazdu (km/h) |

Tab. 6. Macierz decyzyjna problemu (dane spedytorów)

| | K_{11} | K_{12} | K_{21} | K_{22} | K_{31} | K_{32} | K_{33} |
|-------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| T_1 | 7 | 6 | 0,2 | 2,5 | 15 | 68 | 76 |
| T_2 | 5 | 7 | 0,25 | 2,5 | 14 | 54 | 80 |
| T_3 | 6 | 9 | 0,1 | 2 | 16 | 62 | 82 |
| T_4 | 9 | 7 | 0,35 | 3,5 | 18 | 36 | 88 |
| T_5 | 8 | 6 | 0,25 | 2 | 22 | 48 | 68 |
| T_6 | 5 | 8 | 0,3 | 2,5 | 18 | 76 | 57 |

Tab. 7. Macierz porównań parami kryteriów

| | | | |
|-------|--------|--------|--------|
| | K_1 | K_2 | K_3 |
| K_1 | 1,0000 | 0,3333 | 0,2000 |
| K_2 | 3,0000 | 1,0000 | 1,0000 |
| K_3 | 5,0000 | 1,0000 | 1,0000 |

Tab. 8. Znormalizowana macierz porównań parami kryteriów

| | | | |
|-------|--------|--------|--------|
| | K_1 | K_2 | K_3 |
| K_1 | 0,1111 | 0,1429 | 0,0909 |
| K_2 | 0,3333 | 0,4286 | 0,4545 |
| K_3 | 0,5556 | 0,4286 | 0,4545 |

Tab. 9. Znormalizowany wektor wag kryteriów

| | | | |
|-----|--------|--------|--------|
| W | 0,1150 | 0,4055 | 0,4796 |
|-----|--------|--------|--------|

W celu zbadania spójności macierzy porównań parami kryteriów (kryteriów głównych) (tab. 7) wyznaczamy maksymalną wartość własną tej macierzy zgodnie z (16) $\lambda_{\max} = 3,0358$. Maksymalna wartość własna służy do obliczenia indeksu zgodności (15) $CI = 0,0179$, który wykorzystujemy do wyznaczenia współczynnika zgodności (17) $CR = 0,0344$. Otrzymana wartość współczynnika zgodności nie przekracza zalecanej wartości 0,10, co oznacza, że oceny ważności kryteriów w macierzy porównań parami (tab. 7) uznajemy za spójne.

Następnie powtarzamy procedurę dla macierzy porównań parami podkryteriów w ramach kryteriów głównych (tab. 10). W tabeli 11 zestawiono uzyskane wagi lokalne i globalne podkryteriów oraz współczynniki zgodności informujące, że oceny ważności podkryteriów w macierzy porównań parami (tab. 10) są spójne.

Tab. 10. Macierz porównań parami podkryteriów w ramach kryteriów K_1 , K_2 i K_3

| Kryteria | | | | | | | | | |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| K_1 | | | K_2 | | K_3 | | | | |
| | K_{11} | K_{12} | | K_{21} | K_{22} | | K_{31} | K_{32} | K_{33} |
| K_{11} | 1,0000 | 3,0000 | K_{21} | 1,0000 | 3,0000 | K_{31} | 1,0000 | 7,0000 | 3,0000 |
| K_{12} | 0,3333 | 1,0000 | K_{22} | 0,3333 | 1,0000 | K_{32} | 0,1429 | 1,0000 | 0,2000 |
| | | | | | | K_{33} | 0,3333 | 5,0000 | 1,0000 |

Tab. 11. Wagi kryteriów i podkryteriów

| Kryteria | Wagi kryteriów | Podkryteria | CR | Wagi lokalne podkryteriów | Wagi globalne podkryteriów |
|----------|----------------|--------------|-------|---------------------------|----------------------------|
| K_1 | 0,1150 | K_{11} (S) | 0 | 0,7500 | 0,0862 |
| | | K_{12} (S) | | 0,2500 | 0,0287 |
| K_2 | 0,4055 | K_{21} (D) | 0 | 0,7500 | 0,3041 |
| | | K_{22} (D) | | 0,2500 | 0,1014 |
| K_3 | 0,4796 | K_{31} (D) | 0,093 | 0,6434 | 0,3085 |
| | | K_{32} (D) | | 0,0738 | 0,0354 |
| | | K_{33} (S) | | 0,2828 | 0,1356 |

Mając wyznaczone globalne wagi podkryteriów (tab. 11) możemy zastosować metodę SAW przedstawioną w części 4, w celu ustalenia rankingu tras i wybrania trasy optymalnej

w świetle przyjętych kryteriów. Na początku ustalamy wektor warunków granicznych - Tab. 12.

Tab. 12. Wektor warunków granicznych dla podkryteriów

| Podkryterium | K_{11} | K_{12} | K_{21} | K_{22} | K_{31} | K_{32} | K_{33} |
|--------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| Warunek | >3 | >3 | <0,4 | <4 | <20 | <80 | >60 |

Zauważmy, że trasy T_5 i T_6 nie spełniają warunków granicznych. Trasa T_5 ze względu na podkryterium K_{31} (D) przekracza dopuszczalny średni czas przejazdu, natomiast trasa T_6 ze względu na podkryterium K_{33} (S) ma niższą średnią prędkość przejazdu niż wartość graniczna. Oznacza to, że obie trasy odrzucamy na wstępnym etapie analizy.

W przypadku pozostałych tras T_1 , T_2 , T_3 i T_4 zastosujemy metodę SAW, aby wybrać trasę optymalną w ramach przyjętych podkryteriów. Tabela 13 prezentuje rozmytą macierz decyzyjną, której elementy stanowią dane zawarte w tabeli 6, rozmyte za pomocą skierowanych liczb rozmytych. Następnie, zgodnie z (20) tworzymy znormalizowaną rozmytą macierz decyzyjną oraz kombinacje liniowe elementów tej macierzy i wektora globalnych wag podkryteriów (tab. 11). Uzyskane zagregowane wyniki w postaci skierowanych liczb rozmytych zestawiono w tabeli 14. Z kolei tabela 15 prezentuje wyniki defuzyfikacji oraz rankingi rozważanych tras dostawy. Zauważmy, że niezależnie od zastosowanej metody defuzyfikacji uzyskany ranking jest zawsze postaci $T_4 < T_2 < T_1 < T_3$. Oznacza to, że najkorzystniejszą (optymalną) trasą w świetle przyjętych kryteriów jest trasa T_3 .

Tab. 13. Rozmyta macierz decyzyjna problemu

| | K_{11} | | | | ... | K_{21} | | | | ... | K_{33} | | | |
|-------|----------|--------|--------|--------|-----|----------|--------|--------|--------|-----|----------|--------|--------|--------|
| | $f(0)$ | $f(1)$ | $g(1)$ | $g(0)$ | | $f(0)$ | $f(1)$ | $g(1)$ | $g(0)$ | | $f(0)$ | $f(1)$ | $g(1)$ | $g(0)$ |
| T_1 | 4 | 6 | 8 | 10 | ... | 0,23 | 0,21 | 0,19 | 0,17 | ... | 70 | 74 | 78 | 82 |
| T_2 | 2 | 4 | 6 | 8 | ... | 0,28 | 0,26 | 0,24 | 0,22 | ... | 74 | 78 | 82 | 86 |
| T_3 | 3 | 5 | 7 | 9 | ... | 0,13 | 0,11 | 0,09 | 0,07 | ... | 76 | 80 | 84 | 88 |
| T_4 | 6 | 8 | 10 | 12 | ... | 0,38 | 0,36 | 0,34 | 0,32 | ... | 82 | 86 | 90 | 94 |

Tab. 14. Zagregowane wyniki ocen tras względem kryteriów

| | $FSAW(T_i)$ | | | |
|-------|-------------|--------|--------|--------|
| | $f(0)$ | $f(1)$ | $g(1)$ | $g(0)$ |
| T_1 | 0,4939 | 0,5568 | 0,6291 | 0,7152 |
| T_2 | 0,4856 | 0,5490 | 0,6226 | 0,7113 |
| T_3 | 0,5785 | 0,6623 | 0,7666 | 0,9059 |
| T_4 | 0,4593 | 0,5095 | 0,5650 | 0,6278 |

Tab. 15. Wyniki defuzyfikacji oraz rankingi (w ϕ_{RCOM} przyjęto $\lambda = 0,1$, R – ranking)

| | ϕ_{FOM} | R | ϕ_{LOM} | R | ϕ_{MOM} | R | ϕ_{RCOM} | R | ϕ_{COG} | R | ϕ_{GM} | R |
|-------|--------------|-----|--------------|-----|--------------|-----|---------------|-----|--------------|-----|-------------|-----|
| T_1 | 0,5568 | 2 | 0,6291 | 2 | 0,5930 | 2 | 0,6219 | 2 | 0,5998 | 2 | 0,5958 | 2 |
| T_2 | 0,5490 | 3 | 0,6226 | 3 | 0,5858 | 3 | 0,6152 | 3 | 0,5932 | 3 | 0,5889 | 3 |
| T_3 | 0,6623 | 1 | 0,7666 | 1 | 0,7145 | 1 | 0,7562 | 1 | 0,7307 | 1 | 0,7212 | 1 |
| T_4 | 0,5095 | 4 | 0,565 | 4 | 0,5373 | 4 | 0,5595 | 4 | 0,5409 | 4 | 0,5388 | 4 |

6. Wnioski

W artykule zaproponowano wykorzystanie metod wieloatrybutowego podejmowania decyzji (MADM) do rankingu i wyboru najlepszej trasy w systemie dystrybucji. Proponowane podejście wykorzystuje dwie metody MADM: metodę AHP oraz rozmytą metodę SAW. Metoda AHP, jako metoda porównań parami, stanowi skuteczne, ale także mocno subiektywne podejście w ocenie ważności kryteriów. Z kolei wykorzystanie skierowanych liczb rozmytych w ocenie wariantów tras metodą SAW pozwala uczynić to podejście bardziej obiektywnym. Dodatkową zaletą wykorzystania skierowanych liczb rozmytych jest możliwość rozróżnienia w analizie typów kryteriów oceny. Proponowane podejście zastosowania metod MADM jest podejściem znacznie prostszym obliczeniowo w stosunku do klasycznych metod rozwiązywania problemów marszrutyzacji pojazdów. Jednakże posiada ograniczenia w aspekcie definicji warunków ograniczających wybór danego wariantu.

W pracy przedstawiono najprostszy przypadek, jednostopniowego systemu dystrybucji oraz dostawy od dostawcy bezpośrednio do jednego odbiorcy. Wydaje się, że przedstawiona metoda podejmowania decyzji może być skutecznie wykorzystywana również w bardziej złożonych przykładach analizy.

Praca wykonana w ramach realizacji pracy statutowej S/WI/1/2016.

Literatura

1. Kahraman C., Onar S.C., Oztaysi B.: Fuzzy Multicriteria Decision-Making: A Literature Review. *International Journal of Computational Intelligence Systems*, Volume 8, Issue 4, 4 July 2015, 637-666.
2. Patil S. K., Kant R.: A fuzzy AHP-TOPSIS framework for ranking the solutions of Knowledge Management adoption in Supply Chain to overcome its barriers. *Expert Systems with Applications*, 41 (2014) 679-693.
3. Jaberidoost, M., Olfat, L., Hosseini, A., Kebriaeezadeh, A., Abdollahi, M., Alaeddini, M., Dinarvand, R.: Pharmaceutical supply chain risk assessment in Iran using analytic hierarchy process (AHP) and simple additive weighting (SAW) methods. *Journal of Pharmaceutical Policy and Practice*, 8 (1), art. no. 9, 2015, 1-10.
4. Saaty T. L.: *The Analytic Hierarchy Process*, McGraw-Hill, 1980.
5. Saaty T. L.: *Fundamentals of decision making and priority theory with the analytic hierarchy process*. Pittsburgh: RWS Publications. 2006.
6. Kosiński W., Prokopowicz P., Ślęzak D.: Fuzzy Numbers with Algebraic Operations: Algorithmic Approach, in Kłopotek M., Wierzchoń S.T., Michalewicz M. (red.), *Proc. IIS'2002*, Sopot, June 3–6, Poland, Heidelberg: Physica Verlag, 2002, 311–320.
7. Kosiński W., Prokopowicz P., Ślęzak D.: Ordered Fuzzy Numbers, *Bulletin of the Polish Academy of Sciences Mathematic*, 52 (3), 2003, 327-339.
8. Churchman C.W., Ackoff R.L.: An approximate measure of value. *Journal of Operations. Research Society of America*, 2 (1), 1954.
9. Trzaskalik T.: Wielokryterialne wspomaganie decyzji. Przegląd metod i zastosowań. *Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej*, z. 74, 2014, 239-263.
10. Kosiński W., Prokopowicz P.: Algebra liczb rozmytych. *Matematyka Stosowana. Matematyka dla Społeczeństwa*, 5 (46), 2004, 37-63.

11. Kosiński W.: On fuzzy number calculus. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science Int* 16, 2006, 51-57.
12. Kacprzak D.: Ewolucja liczb rozmytych. VII Konferencja naukowo-praktyczna: Energia w nauce i technice, Suwałki, 2008, 783-796.
13. Kacprzak D.: Skierowane liczby rozmyte w modelowaniu ekonomicznych. *Optimum – Studia Ekonomiczne*, 3, 2010, 263-281.
14. Kacprzak D.: Metoda FSAW oparta na skierowanych liczbach rozmytych. *Przegląd Statystyczny*, 2, 2015, 165-181.
15. Kosiński W., Wilczyńska-Sztyma D.: Defuzzification and Implication within Ordered Fuzzy Numbers. In: *IEEE World Congress on Computational Intelligence*, Barcelona, Spain, 2010, 1073-1079.
16. Kobryń A.: Wielokryterialne wspomaganie decyzji w gospodarowaniu przestrzenią. Difin, Warszawa, 2014.
17. Saaty T. L., Ozdemir M. S., Why the Magic Number Seven Plus or Minus Two. *Mathematical and Computer Modelling*, 38, 2003, 233-244.
18. Rudnik K., Kacprzak D.: Rozmyta metoda TOPSIS wykorzystująca skierowane liczby rozmyte. XVIII Konferencja Innowacje w zarządzaniu i inżynierii produkcji, Zakopane, 2015, 958-968.

Dr Dariusz KACPRZAK
 Wydział Informatyki
 Politechnika Białostocka
 15-351 Białystok, ul. Wiejska 45A
 Tel./fax.: (+48 85) 746 90 75
 e-mail: d.kacprzak@pb.edu.pl

Dr inż. Katarzyna RUDNIK
 Instytut Innowacyjności Procesów i Produktów
 Politechnika Opolska
 45-370 Opole, ul. Ozimska 75
 Tel./fax.: (+48 77) 449 88 45
 e-mail: k.rudnik@po.opole.pl